F u n k t i o n a l a n a l y s

Föreläsningar vt 1960

Lars Hörmander

kholms Universitets Matematiska Institution

Inledning

Avsikten med denna föreläsningsserie är att bevisa de i tillämpningarna viktigaste resultaten i funktionalanalysen och exemplifiera deras användning. Historiskt sett är det naturligt att framhäva tillämpningarna eftersom funktionalanalysen har uppstått genom abstraktion från konkreta metoder och problem inom analysen. Banachs klassiska lärobok, Théorie des opérations linéaires (1932), hade fortfarande en sådan inriktning. De framsteg som sedan dess gjorts i teorin har i stor utsträckning hängt samman med nya problemställningar inom analysen, exempelvis i anslutning till distributionsteorin. Den nyaste utvecklingen (se Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, Sao Paulo 1958) kommer emellertid helt att förbigås liksom större delen av den nu klassiska teorin för lokalt konvexa rum.

Valet av material präglas av subjektiva erfarenheter angående värdet i tillämpningarna, främst hämtade från teorin för partiella differentialekvationer. Tyvärr saknas här vissa i tillämpningarna viktiga moment, särskilt Krein-Milmans sats och diverse fixpunktsatser (Schauder, Leray). För dessa hänvisas till litteraturen. Exemplen har valts så enkla att de ofta kan behandlas utan svårighet med direkta metoder. De är alltså bara avsedda att illustrera hur man anpassar problem i analysen till funktionalanalytisk behandling.

Stockholm i mars 1964

Lars Hörmander

K a p i t e l I

Vektorrum

1.1. Definitioner; dimensionsbegreppet. Vi skall i detta kapitel studera allmänna vektorrum utan topologi för att belysa topologins roll i de senare resultaten.

Definition 1.1.1. Ett vektorrum V över de reella talen $\mathbb{R}$ (de komplexa talen $\mathbb{C}$) är en mängd - vars element kallas vektorer - i vilken till två godtyckliga x och $y \in V$ finns tillordnat ett element $x+y \in V$, och till varje $x \in V$ och $a \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) finns tillordnat ett element $ax \in V$ så att följande villkor är uppfyllda:

I) Additionen är kommutativ, dvs. $x+y = y+x$ för alla $x, y \in V$,

associativ, dvs. $x+(y+z) = (x+y)+z$. för alla $x,y,z \in V$.

Det finns ett element $0 \in V$ så att $0 + x = x$ för alla $x \in V$.

II) Multiplikationen med skalär är

distributiv: $a(x+y) = ax + ay$ för alla $x,y \in V$ och $a \in K$,

$(a+b)x = ax + bx$ för alla $x \in V$ och $a,b \in K$.

III) Slutligen skall gälla att $(ab)\, x = a(bx)$ för alla $x \in V$ och $a,\ b \in K$,

$1.x = x$ och $0.x = 0$ för alla $x \in V$.

Här har vi använt beteckningen K för $\mathbb{R}$ respektive $\mathbb{C}$. I det sista villkoret betecknar 0 ena gången ett element i K och andra gången ett element i V.

Dessa villkor är för övrigt inte oberoende av varandra.

Exempel. Om M är en godtycklig mängd så bildar mängden av alla funktioner på M med värden i K ett vektorrum. Om M har ändligt många punkter fås ett vanligt koordinatrum.

Av villkoren i definitionen följer att ekvationen $x+y = z$ för givna x och $z \in V$ har en och endast en lösning $y \in V$. För om vi adderar $(-1)x$ på båda sidor får vi $y = z+(-1)x$ eftersom $x+(-1)x = (1+(-1))x = 0.x = 0$. Omvänt ser man genast att denna vektor y uppfyller den önskade ekvationen. I fortsättningen skriver vi $-x$ i stället för $(-1)x$ och $z-x$ i stället för $z+(-1)x$.

__Definition 1.1.2.__ Elementen $x_1, \dots, x_k \in V$ kallas lineärt beroende om det finns ett lineärt samband mellan dem

$$\sum_1^k a_j x_j = 0$$

med $a_j \in K$ och inte alla a_j lika med 0. Om ett sådant samband inte existerar kallas vektorerna lineärt oberoende.

Med lineärkombinationer av elementen $x_1, \dots, x_k$ menar vi alla summor $\sum_1^k a_j x_j$ med $a_1, \dots, a_k \in K$. Villkoret för lineärt beroende kan då också uttryckas så att något av elementen $x_1, \dots, x_k$ är en lineär kombination av de övriga.

__Sats 1.1.3.__ Låt $x_1, \dots, x_k \in V$ och beteckna med V' mängden av alla lineärkombinationer av $x_1, \dots, x_k$. Då är $k+1$ godtyckliga vektorer i V' lineärt beroende.

__Bevis.__ Satsen följer omedelbart av att varje homogent ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har en icke trivial lösning. Vi skall emellertid ge ett direkt bevis eftersom teorin för lineära ekvationssystem kan härledas ur sats 1.1.3. Satsen är självklar då $k = 1$ och vi bevisar den allmänt genom induktion. Låt de $k+1$ vektorerna vara

$$y_i = \sum_1^k a_{i,j}x_j, \ i = 1, \ldots, k+1.$$

Om alla $a_{i,j} = 0$ så är alla $y_i = 0$ och satsen är trivial. I annat fall finns något $a_{i,j} \neq 0$, och genom omnumrering kan vi åstadkomma att $a_{k+1,k} \neq 0$. Sätt $d_i = -a_{i,k}/a_{k+1,k}$. Då är vektorerna $y_i+d_iy_{k+1}$, $i = 1, \ldots, k$, lineärkombinationer av $x_1, \ldots, x_{k-1}$ och alltså enligt induktionsförutsättningen lineärt beroende. Det finns alltså tal $c_1, \ldots, c_k \in K$ ej alla 0 så att

$$c_1(y_1+d_1y_{k+1}) + \ldots + c_k(y_k+d_ky_{k+1}) = 0.$$

Detta bevisar satsen.

<u>Definition 1.1.4.</u> Ett vektorrum V över K säges ha ändlig dimension = dim $V=d$ över K om det finns d över K lineärt oberoende element i V men $d+1$ element i V alltid är lineärt beroende över K. I annat fall kallas V oändligdimensionellt och man skriver dim $V = \infty$.

Då det inte kan vara någon tvekan om vilken skalärkropp som avses så utelämnar man tillägget "över K", vilket vi gör i fortsättningen.

<u>Definition 1.1.5.</u> Elementen $x_1, \ldots, x_k \in V$ kallas en bas för V om varje element i V på ett och endast ett sätt kan skrivas $\sum_1^k a_jx_j$ med $a_j \in K$.

En ekvivalent definition är: $x_1, \ldots, x_k$ kallas en bas för V om de är lineärt oberoende men $x, x_1, \ldots, x_k$ är lineärt beroende för varje $x \in V$. (Bevisa detta i detalj som övning.)

<u>Sats 1.1.6.</u> Låt V ha ändlig dimension. Varje bas i V har då $=d$ dim V element. Om elementen $x_1, \ldots, x_k \in V$ är lineärt oberoende så kan man finna $x_{k+1}, \ldots, x_d \in V$ så att $x_1, \ldots, x_d$ är en bas.

<u>Bevis.</u> Om en bas har n element så måste $n \leq$ dim V eftersom elementen i en bas är lineärt oberoende. Å andra sidan följer av sats 1.1.3 att $n+1$ god-

tyckliga element i V är lineärt beroende, alltså att $\dim V \leq n$. Detta bevisar det första påståendet. För att visa det andra väljer vi ett maximalt antal element $x_{k+1}, \ldots, x_N$ som tillsammans med $x_1, \ldots, x_k$ är lineärt oberoende. Då är $x_1, \ldots, x_N$ lineärt oberoende medan $x, x_1, \ldots, x_N$ är lineärt beroende för varje $x \in V$. Alltså har vi en bas, vilket visar att $N = d$.

Definition 1.1.7. En delmängd V_1 av ett vektorrum V kallas ett underrum om $x, y \in V_1 \Rightarrow x+y \in V_1$ och $x \in V_1$, $a \in K \Rightarrow ax \in V_1$.

Ett underrum är tydligen ett vektorrum med samma räkneoperationer som i V. (Om man vill vara noggrann säger man lineärt underrum i stället för underrum.) Sätt nu $x \equiv y$ om $x, y \in V$ och $x-y \in V_1$, och låt V/V_1 vara mängden av alla restklasser med avseende på denna ekvivalensrelation. Eftersom $x \equiv x_1$ och $y \equiv y_1$ medför att $x+y \equiv x_1+y_1$ så beror restklassen av en summa av två element i V bara på elementens restklasser. Additionen i V inducerar alltså en addition i V/V_1. På samma sätt definieras multiplikation med skalärer (=element i K), och V/V_1 blir då ett vektorrum, kvotrummet av V med avseende på V_1.

Definition 1.1.8. Om V_1 är ett underrum i V så kallar man dimensionen för kvotrummet V/V_1 för codimensionen av V_1 i V och betecknar den med $\operatorname{codim}_V V_1$ eller bara $\operatorname{codim} V_1$ om inget missförstånd kan tänkas.

Sats 1.1.9. Om $V_2 \subset V_1 \subset V$ så är $\operatorname{codim}_V V_1 = \operatorname{codim}_{V/V_2} V_1/V_2$.

Det triviala beviset lämnas som övning.

Sats 1.1.10. Om V_1 är ett underrum av V så gäller

$$\dim V_1 + \operatorname{codim} V_1 = \dim V.$$

Bevis. Det är klart att $\dim V$ är större än eller lika med vardera termen i vänstra ledet. I beviset räcker det därför att anta att $\dim V_1$ och $\operatorname{codim} V_1$

är ändliga tal n resp. m. Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara en bas i V_1 och låt $y_1, \ldots, y_m$ vara element i V vars restklasser modulo V_1 bildar en bas för V/V_1. Då är $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ en bas för V. För till varje $x \in V$ finns entydigt bestämda b_j så att $x - b_1y_1 - \ldots - b_my_m$ har restklassen 0. Denna skillnad kan då på ett och endast ett sätt skrivas som $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, vilket bevisar påståendet.

Corollarium 1.1.11. Om $V_2 \subset V_1 \subset V$ så är

$$\operatorname{codim}_V V_2 = \operatorname{codim}_V V_1 + \operatorname{codim}_{V_1} V_2.$$

Bevis. Enligt sats 1.1.9 kan vi reducera oss till fallet då $V_2 = \{0\}$, och då sammanfaller påståendet med sats 1.1.10.

I ändligdimensionella rum kan man på grund av sats 1.1.10 undvara begreppet codimension. Det är emellertid viktigt då V har oändlig dimension eftersom V_1 kan ha ändlig codimension utan att ha ändlig dimension.

Sats 1.1 .12. Låt V_1 och V_2 vara underrum i V och sätt

$$V_1+V_2 = \{x_1+x_2;\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\},$$

vilket också är ett underrum. Då gäller

$$\dim (V_1 \cap V_2) + \dim (V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2, \tag{1.1.1}$$

$$\operatorname{codim} (V_1 \cap V_2) + \operatorname{codim} (V_1+V_2) = \operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2, \tag{1.1.2}$$

$$\dim (V_1 \cap V_2) + \operatorname{codim} V_2 = \operatorname{codim} (V_1+V_2) + \dim V_1. \tag{1.1.3}$$

Bevis. Sätt $V_0 = V_1 \cap V_2$, låt W_j $(j = 1, 2)$ vara bilden av V_j och W vara bilden av $V' = V_1+V_2$ i V/V_0. Enligt sats 1.1.10 har vi då

$$\dim V_j = \dim V_0 + \dim W_j,\quad \dim (V_1+V_2) = \dim V_0 + \dim W,$$

medan corollarium 1.1.11 och sats 1.1.9 ger

$$\operatorname{codim}_V V_j = \operatorname{codim}_{V'} V_j + \operatorname{codim}_V V' = \operatorname{codim}_W W_j + \operatorname{codim}_V V'.$$

Eftersom $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ och $W_1+W_2 = W$ har vi exempelvis $W/W_1 \approx W_2$, alltså $\operatorname{codim}_W W_1 = \dim W_2$. Analogt gäller $\operatorname{codim}_W W_2 = \dim W_1$ och eftersom $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim W$ enligt sats 1.1.10 följer nu (1.1.1)-(1.1.3).

1.2. Lineära avbildningar. Låt V_1 och V_2 vara två vektorrum över K. En funktion T med definitionsområdet V_1 och värdeförråd i V_2 kallas en lineär avbildning (transformation) av V_1 in i V_2 om den kommuterar med vektoroperationerna, dvs.

$$T(x+y) = Tx + Ty \ (x,y \in V_1) \qquad T(ax) = a\,Tx \quad (a \in K,\ x \in V_1).$$

Det är klart att summan av två lineära avbildningar av V_1 in i V_2, definierad av $(T_1+T_2)(x) = T_1x+T_2x$, är en lineär avbildning. Vidare är sammansättningen av två lineära avbildningar en lineär avbildning.

Värdeförrådet

$$W_T = \{Tx\ ;\ x \in V_1\}$$

är ett underrum av V_2 och kärnan till T som definieras av

$$K_T = \{x;\ Tx = 0\}$$

är ett underrum av V_1. Kvotrummet V_2/W_T brukar kallas cokärnan till T.

Definition 1.2.1. Med rangen för T menar man dimensionen av värdeförrådet.

Sats 1.2.2. Rangen för T är lika med codimensionen av kärnan.

Bevis. Om $x_1, \ldots, x_k \in V_1$ så är $Tx_1, \ldots, Tx_k$ lineärt beroende i V_2 om och endast om restklasserna av $x_1, \ldots, x_k$ med avseende på K_T är lineärt beroende.

Corollarium 1.2.3. Om T är en lineär avbildning av V_1 in i V_2 så gäller

$$\dim W_T + \dim K_T = \dim V_1 \ , \quad \operatorname{codim} W_T + \operatorname{codim} K_T = \dim V_2.$$

Bevis. Omedelbar konsekvens av sats 1.2.2 och sats 1.1.10.

Corollarium 1.2.4. Om $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty$ så gäller

$$\operatorname{codim} W_T = \dim K_T .$$

Speciellt är alltså $W_T = V_2$ om och endast om $Tx \neq 0$ då $x \neq 0$.

Bevis. Omedelbar konsekvens av satserna 1.2.2 och 1.1.10.

Corollarium 1.2.4 kan löst formuleras så: Antalet lineärt oberoende villkor för lösbarhet av ekvationen $Tx = y$ är lika med antalet lineärt oberoende lösningar till motsvarande homogena ekvation $Tx = 0$. - En viktig uppgift i funktionalanalysen är att i det oändligdimensionella fallet ge tillräckliga villkor för att denna sats skall vara riktig. Ett elementärt resultat av denna typ kan vi bevisa redan nu.

Sats 1.2.5. Låt T vara en lineär transformation av ändlig rang från V till V och låt I vara den identiska operatorn i V. Då gäller

$$\dim K_{I-T} = \operatorname{codim} W_{I-T} < \infty .$$

Bevis. Låt $N = K_T$. Då är $K_{I-T} \cap N = \{0\}$, för $Tx = (I-T)x = 0$ medför $x = 0$. Vidare gäller att $N \subset W_{I-T}$ eftersom $I-T$ reducerar sig till identiteten i N. Låt nu $V' = V/N$ och beteckna bilden av W_{I-T} resp. K_{I-T} i V' med W' resp. K'. Enligt förutsättningen är $\dim V' = \operatorname{codim}_V N = \operatorname{rang} T < \infty$. Eftersom $K_{I-T} \cap N = \{0\}$ så är $\dim K' = \dim K_{I-T}$, och eftersom $N \subset W_{I-T}$ så följer av sats 1.1.9 att $\operatorname{codim}_V W_{I-T} = \operatorname{codim}_{V'} W'$. Då $I-T$ avbildar N i N så inducerar $I-T$ en lineär transformation S i det ändligdimensionella rummet V' med kärna och värdeförråd K' resp. W'. (Observera att om $(I-T)x = y \in N$ så följer att $(I-T)(x-y) = Ty = 0$, alltså $x-y \in K_{I-T}$.) Satsen följer därför av corollarium 1.2.4.

Det finns emellertid lineära transformationer T av V i V för vilka $\dim K_T \neq \operatorname{codim} W_T$. Låt till exempel V vara rummet av alla sviter $x = (x_1, x_2, \ldots)$ med vektoroperationerna definierade som motsvarande operationer på elementen x_k. Låt n vara ett fixt heltal och sätt

$$Tx = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$

där eventuella koordinater med index $\leqq 0$ skall läsas som 0. Då blir

$$\dim K_T = \max(n, 0), \quad \operatorname{codim} W_T = \max(-n, 0),$$

alltså $\dim K_T - \operatorname{codim} W_T = n$.

Låt allmänt T vara en lineär avbildning av V_1 in i V_2.

<u>Definition 1.2.6.</u> Om $\dim K_T$ och $\operatorname{codim} W_T$ ej båda är oändliga så definierar man <u>index av T</u> genom

$$\nu(T) = \dim K_T - \operatorname{codim} W_T. \tag{1.2.1}$$

Index uppfyller den "logaritmiska lagen":

<u>Sats 1.2.7.</u> Låt T_1 vara en lineär avbildning av V_1 in i V_2 och T_2 en lineär avbildning av V_2 in i V_3. För den lineära avbildningen T_2T_1 av V_1 in i V_3 gäller då

$$\nu(T_2T_1) = \nu(T_2) + \nu(T_1)$$

såvida högra ledet har mening, dvs. om antingen $\dim K_{T_j} < \infty$ för $j = 1, 2$ eller också $\operatorname{codim} W_{T_j} < \infty$ för $j = 1, 2$.

<u>Bevis.</u> Observera först att T_1 avbildar $K_{T_2T_1}$ på $W_{T_1} \cap K_{T_2}$ med kärnan K_{T_1}, varför corollarium 1.2.3 ger

$$\dim K_{T_2T_1} = \dim K_{T_1} + \dim (W_{T_1} \cap K_{T_2}). \tag{1.2.2}$$

Om $\dim K_{T_j} < \infty$, $j = 1, 2$, följer därför att $\dim K_{T_2T_1} < \infty$. Betrakta vidare den sammansatta avbildningen

$$V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \longrightarrow V_3/W_{T_2T_1}.$$

Kärnan är $K_{T_2} + W_{T_1}$ och värdeförrådet är $W_{T_2}/W_{T_2T_1}$. Av corollarium 1.2.3 får vi därför med användning av sats 1.1.9

$$(1.2.3) \quad \operatorname{codim} (K_{T_2}+W_{T_1}) + \operatorname{codim} W_{T_2} = \dim (V_3/W_{T_2T_1}) = \operatorname{codim} W_{T_2T_1}.$$

Alltså är $\operatorname{codim} W_{T_2T_1} < \infty$ om $\operatorname{codim} W_{T_j} < \infty$ för $j = 1, 2$. Nu gäller enligt (1.1.3)

$$\dim (W_{T_1} \cap K_{T_2}) + \operatorname{codim} W_{T_1} = \operatorname{codim} (W_{T_1}+K_{T_2}) + \dim K_{T_2}.$$

Addition av $\dim K_{T_1} + \operatorname{codim} W_{T_2}$ till båda sidor ger enligt (1.2.2) och (1.2.3)

$$\dim K_{T_2T_1} + \operatorname{codim} W_{T_2} + \operatorname{codim} W_{T_1} = \operatorname{codim} W_{T_2T_1} + \dim K_{T_1} + \dim K_{T_2},$$

vilket bevisar satsen.

1.3. <u>Existens av hyperplan.</u> Man kallar ett underrum V_1 i V för ett hyperplan om $\operatorname{codim} V_1 = 1$. Detta medför att de enda underrum av V som omfattar V_1 är V och V_1 själva. Vi skall bevisa:

<u>Sats 1.3.1.</u> Varje underrum av V är genomsnittet av de hyperplan som innehåller det.

Detta påstående kan också formuleras på följande sätt:

<u>Sats 1.3.1'.</u> Om V_1 är ett underrum av V och x ett element i V som inte tillhör V_1 så existerar ett hyperplan V_2 i V så att $V_1 \subset V_2$ men $x \notin V_2$.

<u>Bevis.</u> Vi visar först att om $\operatorname{codim} V_1 > 1$ så existerar ett underrum V_2 som strängt omfattar V_1 men inte innehåller x. Bilda därför V/V_1. Detta är då ett rum av dimension minst 2. Vi kan därför finna ett element i V/V_1 som är lineärt oberoende av restklassen av x. Låt elementet i fråga vara restklassen av $y \in V$. Bilda nu

$$V_2 = \{z+ty;\ z\in V_1,\ t\in K\}.$$

Detta är ett underrum av V och omfattar V_1 strängt eftersom $y\notin V_1$, och eftersom bilden av V_2 i V/V_1 genereras av bilden av y innehåller den inte bilden av x. Alltså har vi $x\notin V_2$.

Betrakta nu mängden av alla underrum V_2 av V som omfattar V_1 men inte innehåller x. Föreningsmängden av en fullständigt ordnad mängd av sådana rum har samma egenskap. Enligt Zorns lemma existerar alltså ett maximalt rum V_2 med denna egenskap. Eftersom $x\notin V_2$ är codim $V_2 \geq 1$ men enligt första delen av beviset vore V_2 inte maximalt om codim $V_2 > 1$. Alltså är codim $V_2 = 1$, vilket bevisar satsen.

En av huvudsatserna i funktionalanalysen, Hahn-Banachs sats, behandlar riktigheten av sats 1.3.1' då punkten x utbyts mot en större mängd. Vi skall nu studera sådana resultat.

<u>Definition 1.3.2.</u> En delmängd A av vektorrummet V kallas konvex om för godtyckliga $x, y\in V$ gäller att $\{t;\ t\in\mathbb{R},\ x+ty\in A\}$ är ett intervall. (Detta kan vara öppet, slutet eller halvöppet.) Vi säger att A är konvex och lineärt öppen om intervallet alltid är öppet.

<u>Sats 1.3.3.</u> (Hahn-Banachs sats i geometrisk form.) Låt A vara en konvex lineärt öppen mängd i vektorrummet V över $\mathbb{R}$ och antag att V_1 är ett underrum som inte skär A. Då existerar ett hyperplan V_2 så att $V_1\subset V_2$ och $V_2\cap A$ är to

<u>Bevis.</u> Detta är analogt med beviset för sats 1.3.1 men det 2-dimensionella fallet är inte lika självklart som där. Vi måste därför behandla det först.

a) dim V = 2. Då är $V_1 = \{0\}$ om satsens påstående inte är trivialt. Av konvexiteten följer att om en halvstråle genom 0 skär A så kan den motsatta halvstrålen inte råka A. Tag en halvstråle som är randpunkt till halvstrålar som skär A. Eftersom A är lineärt öppen kan den inte skära A för då skulle alla närliggande halvstrålar också skära A. Men detta gäller också för den motsatta strålen, varför vi har en hel linje som inte skär A, vilket bevisar satsen.

b) Vi visar nu att om codim $V_1 > 1$ så existerar ett underrum V_2 som strängt omfattar V_1 men inte skär A. Bilda därför $V' = V/V_1$ och låt A' vara bilden av A i V'. Då är A' också konvex och lineärt öppen. (Bevisa detta i detalj som övning.) Vidare innehåller A' inte origo. Eftersom dim V' är minst 2 kan vi välja ett 2-dimensionellt underrum av V' och däri en linje med riktningen bestämd av restklassen för $y \in V$ så att linjen inte skär A'. Men då har planet $V_2 = \{z+ty;\ z \in V_1,\ t \in \mathbb{R}\}$ den önskade egenskapen.

c) Slutsteget följer nu av Zorns lemma precis som i beviset för sats 1.3.1. Det lämnas därför åt läsaren.

Definition 1.3.4. Med ett affint underrum (hyperplan) menar man en mängd som genom en translation kan överföras i ett underrum (hyperplan).

Om W är ett affint underrum av V så är alltså $\{x-y;\ x \in W\}$ ett lineärt underrum av V för varje fixt $y \in W$. Omvänt är W ett affint underrum av V om $\{x-y;\ x \in W\}$ är ett underrum för något fixt y. Sats 1.3.3 kan nu formuleras något allmännare:

Sats 1.3.3'. Om V_1 är ett affint underrum av V som inte skär den konvexa, lineärt öppna mängden A så finns ett affint hyperplan $V_2 \supset V_1$ som inte heller råkar A. (Skalärerna antas här reella.)

Även i det oändligdimensionella fallet definieras varje hyperplan av en lineär ekvation. Låt nämligen V_1 vara ett hyperplan i V. Kvotrummet V/V_1 har dimensionen 1 och kan alltså avbildas en-entydigt och lineärt på skalärkroppen K. Vi får genom sammansättning med den kanoniska avbildningen $V \to V/V_1$ en lineär avbildning $l: V \to K$ sådan att inversa bilden av 0 är lika med V_1. Vi har alltså

(1.3.1) $\qquad l(x+y) = l(x) + l(y) \ (x,y \in V), \ l(ax) = al(x) \ (a \in K, x \in V)$

och $l(x) = 0$ är ekvivalent med $x \in V_1$. Man kallar en K-värd funktion på V som uppfyller (1.3.1), alltså en lineär avbildning av V i K, för en K-lineär form eller en K-lineär funktional på V. (Oftast utelämnar man preciseringen av K eftersom det brukar framgå av sammanhanget om $K = \mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$.) Om vi omvänt har en lineär funktional på V som inte är identiskt noll så definierar ekvationen $l(x) = 0$ ett hyperplan. Efter en translation får vi följande resultat:

Sats 1.3.4. Varje affint hyperplan definieras av en ekvation

$$l(x) = a$$

där l är en lineär form på V. Denna är entydigt bestämd bortsett från en proportionalitetsfaktor.

Eftersom varje affint underrum är genomsnitt av affina hyperplan kan varje affint underrum definieras med en familj av lineära ekvationer.

Övning. Visa att om $\operatorname{codim} V_1 < \infty$ så kan V_1 definieras med $\operatorname{codim} V_1$ men ej med färre ekvationer.

Övning. Bestäm de lineära formerna på $\mathbb{R}^n$ och på $\mathbb{C}^n$.

I ett oändligdimensionellt rum finns alltför gott om lineära former.

Man måste därför urskilja intressanta klasser av lineära former genom kontinuitetskrav för att få användbara resultat. I fortsättningen kommer vi sålunda att studera vektorrum med topologi.

Kapitel II

Normerade rum

2.1. Definitioner. Låt E vara ett vektorrum över $K = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

Definition 2.1.1. En funktion $E \ni x \to \|x\| \in \mathbb{R}$ kallas en seminorm om

(2.1.1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in E$,

(2.1.2) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$, $x \in E$, $a \in K$,

(2.1.3) $\|x\| \geq 0$, $x \in E$.

Om dessutom

(2.1.4) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

kallas seminormen för en norm.

Observera att (2.1.2) medför att $\|0\| = 0$, varför enligt (2.1.1) och (2.1.2) fås att $0 = \|x+(-1)x\| \leq \|x\| + \|x\|$. Villkoret (2.1.3) följer alltså av de två första villkoren, och (2.1.4) påstår bara att $\|x\| = 0$ endast då $x = 0$.

Sats 2.1.2. Om $x \to \|x\|$ är en seminorm i E så är

$$F = \{x;\ x \in E,\ \|x\| = 0\}$$

ett lineärt underrum i E. I varje restklass av E modulo F är $\|x\|$ konstant, varför $\|x\|$ inducerar en norm i E/F.

Beviset lämnas som övning.

Om vi har en seminorm i E så kan konvergens definieras på vanligt sätt: en följd $x_n \in E$ sägs $\to x$ då $n \to \infty$ om $\|x_n - x\| \to 0$. Gränsvärdet - om sådant existerar - är entydigt bestämt om man har en norm men inte annars. Med en sluten mängd menar vi en mängd som innehåller sina hopningspunkter och med en öppen mängd komplementärmängden till en sluten mängd. Detta betyder att en mängd O är öppen om till varje $x \in O$ existerar ett $\varepsilon > 0$ så att $y \in O$ om $\|x-y\| < \varepsilon$. En avbildning T av ett seminormerat rum E in i ett annat seminormerat rum F kallas kontinuerlig om till varje $x \in E$ och $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att $\|x-y\|_E < \delta$ medför $\|T(x)-T(y)\|_F < \varepsilon$. Om avbildningen är lineär betyder detta att $\|T(x)\|_F < \varepsilon$ om $\|x\|_E < \delta$, vilket är ekvivalent med att

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \|Tx\|_F / \|x\|_E < \infty .$$

Om F är ett normerat rum så är $\|T\|$ en norm på de kontinuerliga lineära transformationerna från E till F, i annat fall en seminorm.

Sammansättningen av två kontinuerliga lineära transformationer är självklart kontinuerlig och dess norm är högst lika med produkten av faktorernas normer. Låt nu F vara ett underrum i det seminormerade rummet E. Vi vill definiera en seminorm i E/F så att den naturliga avbildningen $E \to E/F$ blir kontinuerlig med semi-norm ≤ 1. Seminormen av restklassen $\xi \in E/F$ får då högst vara

$$\inf_{x \in \xi} \|x\| . \tag{2.1.5}$$

Det inses genast att (2.1.5) definierar en seminorm i E/F (genomför detta som övning) och vi tar därför (2.1.5) som definition av seminormen i E/F. För att (2.1.5) skall definiera en norm fordras att varje $x \in E$ för vilket det finns en svit $x_n \in F$ med $\|x_n - x\| \to 0$ skall tillhöra F. Med andra ord, (2.1.5) definierar en norm i E/F om och endast om F är <u>slutet</u>. Härav får vi nu lätt

<u>Sats 2.1.3.</u> Låt F vara ett hyperplan i E och skriv dess ekvation i formen $f(x) = 0$ där f är en lineär form. Då är F slutet om och endast om f är kontinuerlig.

<u>Bevis.</u> Om f är kontinuerlig och $x_n \in F$, $x_n \to x$, så får vi

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim 0 = 0$$

alltså $x \in F$, varför F är slutet. Antag å andra sidan att F är slutet. Formen f inducerar en lineär avbildning av E/F i K som är kontinuerlig eftersom E/F är normerat och 1-dimensionellt. Nu är avbildningen $x \to f(x)$ sammansättningen av avbildningen $E \to E/F$ och den lineära avbildningen av E/F på K som vi just diskuterat, varför f är kontinuerlig.

Eftersom varje lineär form i ett ändligdimensionellt normerat rum är kontinuerlig får vi allmännare

<u>Sats 2.1.3'.</u> Om F är ett underrum av E med ändlig codimension så är varje lineär form som försvinner i F kontinuerlig om och endast om F är slutet.

2.2. <u>Hahn-Banachs sats.</u> Vi skall ge denna i flera olika varianter som alla är viktiga i tillämpningarna. E betecknar genomgående ett seminormerat rum.

<u>Sats 2.2.1.</u> Låt A vara en öppen konvex mängd i E och F ett affint underrum som inte skär A. Då existerar ett <u>slutet</u> affint hyperplan H som innehåller F och inte heller råkar A.

<u>Bevis.</u> Vi kan anta att $0 \in F$. Antag först att E är ett vektorrum över **R**.

Enligt sats 1.3.3' finns ett hyperplan H som innehåller F och inte skär A, för då A är öppen följer att A är lineärt öppen. Men då är $\bar{H}$ ett underrum som innehåller H och inte heller kan skära A eftersom A är öppen. Alltså är $\bar{H} \neq E$, varför $\bar{H} = H$ eftersom H är ett hyperplan. Detta bevisar satsen då $K = \mathbb{R}$. Om $K = \mathbb{C}$ kan vi alltså välja ett reellt hyperplan H som inte skär A. Genomskärningen $H \cap (iH)$ är då ett komplext hyperplan eftersom dess reella codimension är högst 2, vilket bevisar satsen i detta fall.

Sats 2.2.2. Låt A vara en sluten konvex mängd i E och låt $x \notin A$. Då existerar en kontinuerlig lineär form f på E så att

$$\inf_{y \in A} |f(y) - f(x)| > 0.$$

Speciellt skär alltså planet $\{y;\ f(y) = f(x)\}$ inte A.

Bevis. Välj $\delta > 0$ så att $\{x\} + S$, där $S = \{y;\ \|y\| < \delta\}$, inte skär A. Då är $S+A = \{y+z;\ y \in S,\ z \in A\}$ öppen (den är föreningsmängd av de öppna mängderna $S+\{z\}$, $z \in A$) och självklart konvex eftersom S och A är konvexa. Det existerar alltså ett slutet hyperplan genom x som inte skär S+A. Enligt sats 2.1.3 kan detta skrivas i formen $\{y;\ f(y) = f(x)\}$ där f är en kontinuerlig lineär form på E. Eftersom $f(x) \neq f(y)+f(z)$ för alla $y \in A$ och $z \in S$ och eftersom $\{f(z),\ z \in S\}$ är en omgivning till origo i K så följer nu påståendet.

Sats 2.2.3. Låt F vara ett underrum av E. Då består det slutna höljet $\bar{F}$ av F av alla $x \in E$ sådana att $f(x) = 0$ för alla kontinuerliga lineärformer på E som försvinner på F.

Bevis. Om f är en kontinuerlig lineärform som är noll på F så måste f vara noll på $\bar{F}$. Om å andra sidan $x \notin \bar{F}$ så följer av sats 2.2.2 eftersom $\bar{F}$

är sluten och lineär, alltså konvex, att man kan finna en kontinuerlig lineärform f så att $f(y) \neq f(x)$ då $y \in \overline{\overline{F}}$. Eftersom $y \in \overline{\overline{F}}$ medför att $ay \in \overline{\overline{F}}$ för varje $a \in K$ så får vi att $af(y) \neq f(x)$ för varje $a \in K$, alltså $f(y) = 0 \neq f(x)$. Detta bevisar satsen.

Sats 2.2.4. Låt F vara ett underrum av E och f en lineär form definierad i F sådan att

$$(2.2.1) \qquad |f(x)| \leq C\|x\|, \quad x \in F.$$

Då existerar en lineär form f_1 definierad på hela E som sammanfaller med f på F och för vilken med samma konstant C

$$(2.2.2) \qquad |f_1(x)| \leq C\|x\|, \quad x \in E.$$

Bevis. Låt N vara det affina plan i F som definieras av ekvationen $f(x) = C$. På grund av (2.2.1) skär N inte den öppna konvexa enhetssfären $\{x;\ \|x\| < 1\}$. Det finns alltså ett hyperplan, med ekvationen $f_1(x) = C$, som innehåller N och inte heller skär sfären. Eftersom $\|x\| < 1$ medför $\|ax\| < 1$ om $|a| \leq 1$ betyder detta att $|f_1(x)| < C$ då $\|x\| < 1$, vilket bevisar (2.2.2). Då de lineära formerna f och f_1 sammanfaller i hyperplanet N i F (där de båda är lika med C) och detta inte går genom origo, så följer att $f = f_1$ i F, vilket bevisar satsen.

Vi skall nu ge några exempel på tillämpningar av Hahn-Banachs sats. Detta fordrar kännedom om de kontinuerliga lineärformerna på några rum, varför vi först erinrar om några sådana resultat från integrationsteorin.

1) Låt E vara rummet l^p av alla sviter $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ med

$$\|x\|_p = \left(\sum_1^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Här är $1 \leq p < \infty$. Om $p = \infty$ betraktar man i stället alla begränsade sviter och sätter $\|x\|_\infty = \sup |x_n|$. Varje kontinuerlig lineärform f på l^p kan då om $1 \leq p < \infty$ skrivas

$$f(x) = \sum_1^\infty x_n y_n$$

där $y \in l^{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$. Normen av lineärformen är $\|y\|_{p'}$.

2) Analogt för rummet L^p med avseende på ett positivt mått $d\mu$ på ett lokalt kompakt rum.

3) Låt E vara rummet C_0 av alla kontinuerliga funktioner på $(-\infty,+\infty)$ som $\to 0$ i ∞, med $\sup |f|$ som norm. De kontinuerliga lineärformerna kan skrivas

$$f \to \int f \, d\mu$$

där $d\mu$ är ett mått med ändlig totalmassa, lika med lineärformens norm.

Vi ger nu några exempel på användning av de olika varianterna av Hahn-Banachs sats.

Exempel 1. Låt f vara periodisk med perioden 2π och integrabel i $(0,2\pi)$. Då är lineärkombinationerna av de translaterade $f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, täta i $L^1(0,2\pi)$ om och endast om varje Fourierkoefficient för f är $\neq 0$.

Enligt sats 2.2.3 är lineärkombinationerna av de translaterade täta om och endast om $g \in L^\infty$ och $\int_0^{2\pi} f(x-a)g(x)dx = 0$ för varje a medför att $g = 0$ nästan överallt. (Detta följer av att varje kontinuerlig lineärform på $L^1(0,2\pi)$ är skalärprodukt med en funktion $g \in L^\infty$.) Om en Fourierkoefficient $c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)dx$ är noll så kan vi ta $g(x) = e^{-inx}$. Å andra sidan, av att $\int f(x-a)g(x)dx = 0$ får vi för varje n

$$0 = \iint e^{in(x-a)} f(x-a) e^{-inx} g(x) da dx = \int_0^{2\pi} e^{inx} f(x)\, dx \int_0^{2\pi} e^{-inx} g(x)\, dx$$

och om alla Fourierkoefficienter för f är $\neq 0$ följer att alla Fourierkoefficienter för g måste vara 0. En entydighetssats för Fourierserier ger då att

$g(x) = 0$ nästan överallt. (Beviset för entydighetssatsen faller naturligtvis utanför vårt ämne.)

Exempel 2. Låt K vara en kompakt mängd i E och f en funktion som är analytisk i en omgivning av K. Då kan man till varje $\varepsilon > 0$ finna en rationell funktion g så att $|f-g| < \varepsilon$ på K.

Vi skall använda sats 2.2.3 med E lika med mängden av alla kontinuerliga funktioner på K normerade med maximumnormen och F=mängden av restriktioner till K av rationella funktioner av z som är kontinuerliga på K. Varje kontinuerlig lineärform på E kan skrivas

$$g \to \int g \, d\mu$$

där $d\mu$ är ett mått på K. Om den försvinner på F har vi speciellt

$$\int (z-\zeta)^{-1} \, d\mu(\zeta) = 0 \, , \quad z \notin K.$$

Välj nu ett område $\omega \supset K$ begränsat av ändligt många cirkelbågar så att f är analytisk i en omgivning av $\overline{\omega}$. Enligt Cauchys integralformel har vi

$$f(\zeta) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial\omega} (z-\zeta)^{-1} f(z)dz, \quad \zeta \in K,$$

vilket medför att

$$\int f(\zeta)d\mu(\zeta) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial\omega} f(z)dz \int (z-\zeta)^{-1} d\mu(\zeta) = 0$$

eftersom vi kan omkasta integrationsordningarna. Detta bevisar påståendet enligt sats 2.2.3.

Exempel 3. Låt Ω vara ett begränsat öppet område i E^n och f en kontinuerlig funktion i $\overline{\Omega}$. Vi vill lösa ekvationen $\Delta u = f$. Antag att vi hade en två gånger kontinuerligt deriverbar lösning till denna ekvation. Om $v \in C_0^2(\Omega)$ (dvs. v är två gånger kontinuerligt deriverbar och 0 utanför en kompakt delmängd av Ω) skulle partialintegration då ge

$$\int f\ v\ dx = \int (\Delta u)\ v\ dx = \int u\ \Delta v\ dx.$$

Låt $\| \ \|$ beteckna L^2 norm. Av identiteterna

$$\int v \Delta v\ dx = \sum - \int (\partial v/\partial x_j)^2 dx, \quad \int v^2 dx = \int -x_1 2v \partial v/\partial x_1\ dx, \quad v \in C_0^2(\Omega),$$

får vi om $|x_1| < C$ då $x \in \Omega$

$$\|\partial v/\partial x_1\|^2 \leq \|v\|\ \|\Delta v\|, \quad \|v\|^2 \leq 2C\|v\|\ \|\partial v/\partial x_1\|,$$

varav $\|v\| \leq 4C^2\|\Delta v\|$. Betrakta nu på delrummet ΔC_0^2 av $L^2(\Omega)$ den lineära formen

$$\Delta v \to \int f\ v\ dx, \quad v \in C_0^2(\Omega).$$

Eftersom $|\int f\ v\ dx| \leq \|f\|\ \|v\| \leq 4C^2\|f\|\ \|\Delta v\|$ så är formen kontinuerlig och kan enligt sats 2.2.4 utvidgas till en kontinuerlig lineär form på hela $L^2(\Omega)$. Det existerar därför en funktion $u \in L^2(\Omega)$ med $\|u\| \leq 4C^2\|f\|$ så att

$$\int u\ \Delta\ v\ dx = \int f\ v\ dx, \quad v \in C_0^2(\Omega). \tag{2.2.3}$$

Om u vore två gånger kontinuerligt deriverbar skulle vi genom partialintegration få att $\Delta\ u = f$. Man kallar en funktion u som uppfyller (2.2.3) en svag lösning till ekvationen $\Delta\ u = f$. Problemet att avgöra i vilken utsträckning u är en klassisk lösning tillhör teorin för differentialekvationer och inte funktionalanalysen. Med ovanstående teknik kan man alltid reducera beviset för existens av lösning till en differentialekvation till beviset av en olikhet samt studiet av egenskaper hos svaga lösningar.

Exempel 4. Låt T vara en lineär transformation av E i E med $\|T\| = 1$ och antag att $Tx_0 = x_0$ för något $x_0 \neq 0$. Då existerar en kontinuerlig lineär form f med $f(x_0) = 1$, $\|f\| = 1$ och $f(Tx) = f(x)$, $x \in E$.

Före beviset påpekar vi ett specialfall: På rummet E av alla begränsade reella talföljder $x = (x_1, x_2, \dots)$ existerar en lineärform f så att

$$\underline{\lim}\, x_n \leq f(x) \leq \overline{\lim}\, x_n ,$$

vilket medför att $f(x) = \lim x_n$ om gränsvärdet existerar, vidare är

$$f(x) = f(y) \text{ om } y = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots), \; k \geq 0.$$

Lineariteten innebär att $f(ax+by) = a\, f(x) + bf(y)$.

Man kallar $f(x)$ för ett Banachskt generaliserat gränsvärde. Det kan tydligen betraktas som en generalisering av Cantors diagonalförfarande. Vi lämnar som övning att verifiera att existensen av ett Banachskt gränsvärde följer av den ursprungliga formuleringen.

För att bevisa exempel 4 inför vi en ny norm i E. Sätt därför

$$|||x||| = \inf \Big\| \sum_0^\infty \lambda_n T^n x \Big\|$$

där infimum tas över alla icke negativa $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ med summan $= 1$ och endast ändligt många $\lambda_n \neq 0$. Vi får då en seminorm. För om

$$\Big\| \sum \lambda_n T^n x \Big\| < |||x||| + \varepsilon \text{ och } \Big\| \sum \mu_n T^n y \Big\| < |||y||| + \varepsilon$$

så följer eftersom $\|T\| = 1$ att

$$\Big\| (\sum \lambda_n T^n)(\sum \mu_n T^n)(x+y) \Big\| \leq |||x||| + |||y||| + 2\varepsilon.$$

Detta ger genast triangelolikheten, och homogeniteten av $|||\cdot|||$ är självklar. Eftersom $\| n^{-1}(I+T+\dots+T^{n-1})(Tx-x) \| = \| T^n x - x \| / n \leq 2\|x\|/n \to 0$ då $n \to \infty$, så gäller att $|||Tx-x||| = 0$. På grund av villkoret $Tx_0 = x_0$ har vi $|||x_0||| = 1$ så sats 2.2.4 visar att det finns en lineär form f på E med $f(x_0) = 1$ och

$$|f(x)| \leq |||x||| \text{ för alla } x.$$

Detta medför att $|f(x)| \leq \|x\|$ och att $f(Tx) - f(x) = f(Tx-x) = 0$ för alla x.

Som förberedelse för ett senare avsnitt skall vi nu använda Hahn-Banachs sats för att studera projektioner.

Definition 2.2.5. Låt E vara ett vektorrum och $E_1, \ldots, E_k$ underrum i E. Man säger att E är direkt summa av $E_1, \ldots, E_k$ om varje $x \in E$ på ett och endast ett sätt kan skrivas

$$x = \sum_1^k x_i, \; x_i \in E_i.$$

Om E är ett normerat rum kallar man E direkt topologisk summa av $E_1, \ldots, E_k$ om avbildningen $x \to x_i$ dessutom är kontinuerlig för varje i.

Låt P_i vara avbildningen $x \to x_i$. Om I är identiska operatorn har man då

$$I = P_1 + \ldots + P_k, \quad P_i P_j = 0 \text{ om } i \neq j, \; P_i^2 = P_i.$$

Är summan direkt topologisk så är P_i kontinuerlig för varje i.

Definition 2.2.6. En lineär avbildning P av ett lineärt rum E i sig kallas en projektion om $P^2 = P$.

Sätter man $E_1 = \{x;\, Px = x\}$ och $E_2 = \{x;\, Px = 0\}$ så blir E_1 och E_2 underrum. Om P är kontinuerlig blir de också slutna. Vidare kan varje $x \in E$ på ett och endast ett sätt skrivas $x = x_1 + x_2$ med $x_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Vi får nämligen $Px = Px_1 = x_1$ och $x_2 = x - Px$. En uppdelning av rummet i direkt (topologisk) summa av två underrum svarar alltså en-entydigt mot en (kontinuerlig) projektion P.

Sats 2.2.7. Låt E_1 vara ett ändligdimensionellt underrum av det normerade rummet E. Då existerar en kontinuerlig projektion av E på E_1.

Bevis. Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara en bas i E_1. Vi skall då finna lineära kontinuerliga former l_j så att

$$Px = \sum_1^n l_j(x)\, x_j$$

är en projektion på E_1. Detta betyder att $l_j(x_k) = \delta_{jk}$ (Kroneckersymbolen som $= 0$ då $j \neq k$ och $= 1$ då $j = k$). Men den lineära form l_j på E_1 som definieras av detta villkor är kontinuerlig eftersom E_1 har ändlig dimension, och enligt Hahn-Banachs sats (sats 2.2.4) kan den utvidgas till en kontinuerlig lineärform på hela E.

Motsvarande sats då E_1 har ändlig codimension är helt elementär.

Sats 2.2.8. Om E_1 är ett slutet underrum av E med ändlig codimension så existerar en kontinuerlig projektion av E på E_1.

Bevis. Välj element $x_1, \ldots, x_n$ så att deras restklasser modulo E_1 bildar en bas i det ändligdimensionella vektorrummet E/E_1. Varje element $x \in E$ kan då på ett och endast ett sätt skrivas

$$x = x' + \sum_1^n a_j x_j$$

med $x' \in E_1$. Det är klart att avbildningen $x \to a_j$ är en lineär form, och då den är 0 på E_1 följer av sats 2.1.3' att den är kontinuerlig. Alltså är också projektionen $x \to x'$ kontinuerlig.

2.3. Fullständiga rum. Baires sats och dess konsekvenser. Vi inför nu ett villkor som svarar mot Cauchys konvergensprincip för reella tal.

Definition 2.3.1. Ett normerat rum E kallas fullständigt om till varje Cauchyföljd i E, alltså varje följd $x_n \in E$ med $\|x_n - x_m\| \to 0$ då n och $m \to \infty$, existerar ett gränsvärde x, så att alltså $\|x_n - x\| \to 0$ då $n \to \infty$.

Att omvänt varje konvergent följd är en Cauchyföljd är en omedelbar konsekvens av triangelolikheten. Exempel på fullständiga rum är varje rum av ändlig dimension (följer av Cauchys konvergensprincip) och rummen L^p, l^p (detta är innehållet i Riesz-Fieschers sats). Vid bevis av fullständighet är följande observation ofta värdefull.

Sats 2.3.2. E är fullständigt om och endast om av $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$ ($x_n \in E$) följer att $\sum_1^N x_n$ har ett gränsvärde då $N \to \infty$.

Det enkla beviset lämnas som övning.

Definition 2.3.3. Ett fullständigt normerat rum kallas ett Banachrum.

Sats 2.3.4. Om E är ett normerat rum och F ett Banachrum så är rummet $L(E, F)$ av alla kontinuerliga lineära avbildningar av E i F med normen

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \|Tx\|_F / \|x\|_E$$

ett Banachrum. Speciellt är rummet av alla kontinuerliga lineärformer på E ett Banachrum, som kallas för dualrummet till E.

Bevis. Om $T_n \in L(E, F)$ och $\sum \|T_n\| < \infty$ så är $\sum \|T_n x\| < \infty$ för varje $x \in E$, varför $Tx = \sum_1^\infty T_n x$ existerar för varje $x \in E$. Vi har $\|Tx\| \leqq \|x\| \sum_1^\infty \|T_n\|$, varför $T \in L(E, F)$, och $\|T\| \leqq \sum_1^\infty \|T_n\|$. Härav följer att $\|T - \sum_1^N T_n\| \leqq \sum_{N+1}^\infty \|T_n\| \to 0$ då $N \to \infty$, vilket bevisar att $L(E, F)$ är fullständigt.

Sats 2.3.5. Om E är ett Banachrum och F ett slutet underrum i E så är E/F ett Banachrum.

Det enkla beviset lämnas som övning. - Vi skall nu studera de viktiga konsekvenserna av fullständigheten.

Sats 2.3.6. (Baires sats) Låt B vara ett Banachrum och F_n slutna delmängder av B. Om ingen av mängderna F_n har en inre punkt så saknar $\bigcup_1^\infty F_n$ också inre punkter. Speciellt är alltså $\bigcup_1^\infty F_n \neq B$.

Bevis. Låt $K_0 = \{x;\ \|x - x_0\| \leqq r_0\}$ vara ett godtyckligt klot. Vi vill successivt välja klot $K_n = \{x;\ \|x - x_n\| \leqq r_n\}$ så att $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$

och $r_n \to 0$ samt $K_n \cap F_n$ är tom för $n = 1, 2, \ldots$ Antag att kloten $K_1, \ldots, K_n$ redan valts. I det inre av K_n finns då någon punkt x_{n+1} som inte tillhör F_{n+1} och eftersom F_{n+1} är sluten finns då ett klot K_{n+1} med centrum i x_{n+1} som har den önskade egenskapen. Om $m < n$ har vi $x_n \in K_n \subset K_m$ varför $\|x_n - x_m\| < r_m \to 0$ då $m \to \infty$. Alltså är följden x_n en Cauchyföljd och därför konvergent. Om gränsvärdet är x har vi $x \in K_m$ för varje m eftersom $x_n \in K_m$ då $m > n$ och K_m är sluten. Detta bevisar att $x \notin \bigcup_1^\infty F_m$. Hela klotet K_0 tillhör alltså inte $\bigcup_1^\infty F_m$, vilket bevisar satsen.

Baires sats säger grovt att slutna mängder utan inre punkter är synnerligen glesa eftersom man inte kan utfylla hela rummet med uppräkneligt många sådana. Satsen leder till följande viktiga begrepp för karakterisering av undantagsmängder i ett Banachrum.

Definition 2.3.7. En delmängd A av B sägs vara av första kategorin om det finns en följd av slutna mängder F_n i B utan inre punkter så att $A \subset \bigcup_1^\infty F_n$. En mängd som inte är av första kategorin sägs vara av andra kategorin.

Sats 2.3.8. Varje delmängd av en mängd av första kategorin är av första kategorin. Föreningsmängden av uppräkneligt många mängder av första kategorin är av första kategorin. Ingen mängd av första kategorin har en inre punkt.

Bevis. De två första påståendena följer omedelbart av definitionen, det sista är Baires sats.

I tillämpningarna förekommer oftast några följdsatser till Baires sats som vi skall bevisa senare. Vi ger emellertid ett par exempel där Baires sats med fördel kan användas direkt.

Exempel 1. Det existerar en begränsad Lipschitzkontinuerlig funktion på reella axeln som inte är deriverbar i någon rationell punkt.

Bevis. De likformigt Lipschitzkontinuerliga begränsade funktionerna f bildar ett Banachrum B med normen

$$\|f\| = \sup |f(x)| + \sup_{x \neq y} |(f(x)-f(y))/(x-y)|.$$

(Bevisa fullständigheten som övning.) Ordna de rationella talen i en följd $r_1, r_2, \ldots$ och låt F_n vara mängden av de $f \in B$ som är deriverbara i punkten r_n. Då är F_n en sluten mängd. För om $f_j \in F_n$ och $\|f_j - f\| \to 0$ så konvergerar funktionerna $(f_j(x) - f_j(r_n))/(x-r_n)$, definierade som $f_j'(r_n)$ för $x = r_n$, likformigt på $(-\infty, +\infty)$. Gränsfunktionen är därför kontinuerlig också i punkten r_n, alltså har kvoten $(f(x)-f(r_n))/(x-r_n)$ ett gränsvärde då $x \to r_n$, dvs. $f \in F_n$. Nu finns det Lipschitzkontinuerliga funktioner som inte är deriverbara i r_n. Alltså är $F_n \neq B$ och eftersom F_n är ett underrum måste F_n då sakna inre punkt. Alltså är $\bigcup_1^\infty F_n$ av första kategorin och varje $f \notin \bigcup_1^\infty F_n$ har den önskade egenskapen.

Exempel 2. Det existerar en funktion som är analytisk inom enhetscirkeln, kontinuerlig i den slutna enhetscirkeln men har denna som naturlig gräns.

Bevis. Låt $z_1, z_2, \ldots$ vara en tät punktmängd på enhetscirkelns periferi. Den aktuella funktionsmängden är ett Banachrum om den normeras med maximum av absolutbeloppet. Vi betecknar det med B, och låter F_n vara mängden av de $f \in B$ som kan utvidgas analytiskt till cirkeln $|z-z_n| < 1/n$ så att utvidgningen har absolutbelopp $\leq n$ där. Av Stieltjes-Vitalis urvalssats följer genast att F_n är sluten. Vidare är $F_n \neq B$, vilket inses av exemplet $f(z) = a/(z-w)$ för lämpligt w utanför enhetscirkeln. Detta exempel visar också att F_n saknar inre punkt, för om $f \in F_n$ kan inte $f(z)+a/(z-w)$ vara i F_n för något $a \neq 0$. Alltså är $\bigcup_1^\infty F_n$ av första kategorin, och eftersom varje f som kan fortsättas över enhetscirkeln måste tillhöra F_n för något n bevisar detta påståendet.

Vi bevisar nu en av de viktigaste följdsatserna till Baires sats.

Sats 2.3.9. (Banachs sats) Låt T vara en kontinuerlig en-entydig lineär avbildning av ett Banachrum B_1 in i ett annat B_2. Om W_T är av andra kategorin, alltså speciellt om $W_T = B_2$, följer då att den inversa avbildningen är kontinuerlig, alltså att

$$\|x\| \leq C\|Tx\|, \quad x \in B_1. \tag{2.3.1}$$

Vidare är $W_T = B_2$.

Bevis. Låt A_n vara bilden i B_2 av klotet med radien n i B_1,

$$A_n = \{Tx;\ x \in B_1,\ \|x\|_1 \leq n\}.$$

(Vi betecknar normen i B_j med $\|\cdot\|_j$.) Då är $W_T = \bigcup_1^\infty A_n \subset \bigcup_1^\infty \bar{A}_n$ vilket medför att $\bar{A}_n$ måste ha en inre punkt för något n om W_T inte är av första kategorin. För ett sådant n kan vi välja $y_0 \in B_2$ så att $\{y_0+y;\ \|y\|_2 < \varepsilon\}$ tillhör $\bar{A}_n$ för något $\varepsilon > 0$. Eftersom $\bar{A}_n$ är symmetrisk med avseende på origo måste också $-y_0+y$ tillhöra $\bar{A}_n$ om $\|y\|_2 < \varepsilon$, och eftersom $\bar{A}_n$ är konvex (som lineär bild av en konvex mängd) måste $y = \frac{1}{2}((y_0+y)+(-y_0+y))$ tillhöra $\bar{A}_n$. Origo är alltså en inre punkt. Eftersom $\bar{A}_n = n\bar{A}_1$ så är origo en inre punkt till $\bar{A}_1$ också, dvs. det existerar ett tal $c > 0$ så att

$$\|y\|_2 \leq c \Rightarrow y \in \bar{A}_1.$$

Till varje $y \in B_2$ med $\|y\|_2 \leq c$ kan vi därför finna $x \in B_1$ med $\|x\|_1 \leq 1$ så att

$$\|y - Tx\|_2 \leq c/2.$$

Av homogenitetsskäl följer nu att till varje $y \in B_2$ existerar ett $x \in B_1$ så att

$$\|x\|_1 \leq \|y\|_2/c \quad \text{och} \quad \|y - Tx\|_2 \leq \|y\|_2/2.$$

Givet y kan vi därför definiera en följd x_n och en följd y_n så att $y_0=y$ och

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n, \ \|x_n\|_1 \leq \|y_n\|_2/c, \ \|y_{n+1}\|_2 \leq \|y_n\|_2/2.$$

Härav får vi

$$(2.3.2) \quad \|y_n\|_2 \leq \|y\|_2/2^n, \ \|x_n\|_1 \leq \|y\|_2/2^n c, \ T(\sum_0^n x_j) = y - y_{n+1}.$$

Eftersom $\sum_0^\infty \|x_n\|_1 \leq 2\|y\|_2/c$ så konvergerar delsummorna i $\sum_0^\infty x_j$ mot ett gränsvärde x med $\|x\|_1 \leq 2\|y\|_2/c$, och då T är kontinuerlig och $y_{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$ får vi av sista ledet i (2.3.2) att $Tx = y$. Detta bevisar att $W_T = B_2$ och att (2.3.1) gäller med $C = 2/c$, eftersom T är en-entydig.

Corollarium 2.3.10. Om T är en kontinuerlig lineär avbildning av ett Banachrum B_1 in i ett annat B_2 så är W_T av första kategorin om $W_T \neq B_2$.

Bevis. Genom att övergå till den avbildning av B_1/K_T in i B_2 som induceras av T kan vi reducera oss till fallet då T är en-entydig. Men då följer av sats 2.3.9 att $W_T = B_2$ om W_T inte är av första kategorin.

Exempel. Det finns en funktion $u \in C^2(\Omega)$ som uppfyller differentialekvationen $\partial^2 u/\partial x \partial y + u = 0$ i det begränsade öppna området Ω i R^2, medan u inte tillhör $C^3(\Omega)$.

Bevis. Låt B_2 vara mängden av alla lösningar till ekvationen i $C^2(\Omega)$ för vilka

$$\|u\|_2 = \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{\Omega} |D^\alpha u| < \infty .$$

($D^\alpha u$ betecknar en godtycklig partiell derivata och $|\alpha|$ dess ordning.) Låt ω vara ett relativt kompakt delområde av Ω. Om alla $u \in B_2$ tillhör $C^3(\overline{\omega})$ så är

$$\|u\|_1 = \|u\|_2 + \sup_{|\alpha|=3} \sup_{\omega} |D^\alpha u| < \infty$$

för varje $u \in B_2$. Låt B_1 vara rummet med samma element som B_2 men med denna norm. Det är lätt att inse att B_1 och B_2 är fullständiga (genomför det som övning), och den identiska avbildningen $B_1 \to B_2$ har norm ≤ 1 och avbildar B_1 på hela B_2. Men enligt Banachs sats har vi då

$$\|u\|_1 \leq C\|u\|_2,$$

alltså

$$\sup_{|\alpha|=3} \sup_{\omega} |D^\alpha u| \leq C\|u\|_1 .$$

Vi använder nu detta på $u(x) = \exp(i(tx+y/t))$, vilket är en lösning till differentialekvationen för varje fixt t. Då $t \to \infty$ genom reella värden får vi en motsägelse som bevisar påståendet.

Av den mera precisa formuleringen av Banachs sats följer också att mängden av de $u \in B_2$ som $\in C^3(\overline{\omega})$ är av första kategorin i B_2. Tag en bas ω_j för öppna delmängder av Ω (dvs. varje öppen delmängd av Ω innehåller någon mängd ω_j). Då är mängden av de $u \in B_2$ som $\in C^3$ i $\overline{\omega}_j$ för något j också av första kategorin. Alltså existerar $u \in B_2$ som inte tillhör $C^3(\overline{\omega}_j)$ för något j, vilket medför att u inte tillhör $C^3(\omega)$ för något öppet (icke tomt) delområde av Ω.

Vi skall nu formulera en variant av Banachs sats som implicit förekom redan i beviset för föregående exempel.

<u>Definition 2.3.11.</u> Låt T vara en lineär avbildning av ett lineärt underrum D_T av B_1 in i B_2. Man säger att T är sluten om av $x_n \in D_T$, $x_n \to x$ och $Tx_n \to y$ då $n \to \infty$ följer att $x \in D_T$ och $Tx = y$.

En ekvivalent formulering är att grafen G_T för T, som består av alla par (x, Tx) med $x \in D_T$ och med addition definierad komponentvis samt med normen $\|x\|_1 + \|Tx\|_2$, är ett Banachrum. (Utför beviset i detalj som övning.)

Sats 2.3.12. (Satsen om den slutna grafen) Om T är en sluten lineär avbildning av hela Banachrummet B_1 in i Banachrummet B_2 så är T kontinuerlig.

Bevis. Avbildningen

$$G_T \ni (x, Tx) \longrightarrow x \in B_1$$

uppfyller förutsättningarna i Banachs sats - den är ju kontinuerlig med norm ≤ 1 och definierad i ett Banachrum. Alltså är inversen kontinuerlig, vilket visar att $\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1$.

Som övning lämnar vi beviset för två varianter av sats 2.3.12.

Sats 2.3.13. Om T är en sluten lineär avbildning definierad på $D_T \subset B_1$ med värden i B_2, där B_1 och B_2 är Banachrum) så är D_T av första kategorin om $D_T \neq B_1$.

Sats 2.3.14. Låt B_i, $i = 0, 1, 2$ vara Banachrum och T_i, $i = 1, 2$ vara lineära slutna avbildningar av $D_{T_i} \subset B_0$ in i B_i. Om $D_{T_1} \subset D_{T_2}$ så finns en konstant C så att

$$\|T_2x\|_2 \leq C(\|T_1x\|_1 + \|x\|_0), \; x \in D_{T_1}.$$

Vi kommer nu till vår sista följdsats till Baires sats.

Sats 2.3.15. (Banach-Steinhaus; principen om den likformiga begränsningen.) Låt B_1 och B_2 vara två Banachrum och H en delmängd av $L(B_1, B_2)$, mängden av alla kontinuerliga lineära avbildningar av B_1 in i B_2. Om H är punktvis begränsad, dvs.

$$\sup_{T \in H} \|Tx\|_2 < \infty \quad \text{för varje fixt } x \in B_1$$

så är H likformigt begränsad, dvs.

$$\sup_{T \in H} \|T\| < \infty .$$

(Omvändningen är självklar.)

Bevis. Låt F_n vara mängden av alla $x \in B_1$ för vilka

$$\|Tx\|_2 \leq n \quad \text{för alla } T \in H.$$

F_n är sluten eftersom alla $T \in H$ är kontinuerliga, och enligt förutsättningen är $\bigcup F_n = B_1$. Alltså kan vi enligt Baires sats finna n så att F_n har en inre punkt. Eftersom F_n är konvex och symmetrisk följer som i beviset för Banachs sats att origo är en inre punkt, dvs. det existerar $\varepsilon > 0$ så att $\|x\|_1 \leq \varepsilon$ medför $x \in F_n$, dvs. $\|Tx\|_2 \leq n$ för alla $T \in H$. Av homogenitetsskäl följer då att $\|Tx\|_2 \leq n\|x\|_1/\varepsilon$ för alla T, alltså att $\|T\| \leq n/\varepsilon$. Detta bevisar satsen.

Observera att det är irrelevant om B_2 är fullständigt. Av beviset följer också

Sats 2.3.16. Låt B_1 och B_2 vara två Banachrum och H en mängd av kontinuerliga lineära avbildningar av B_1 in i B_2. Om $\sup_{T \in H} \|T\| = \infty$ så är mängden av de $x \in B_1$ för vilka $\sup_{T \in H} \|Tx\|_2 < \infty$ av första kategorin.

Bevis. I beviset för föregående sats måste alla de slutna mängderna F_n sakna inre punkt, varför $\bigcup F_n$ är av första kategorin.

Vi kommer nu till användningar av Banach-Steinhaus sats.

Exempel 1. Det existerar en kontinuerlig funktion med perioden 2π för vilken delsummorna av Fourierserien inte är begränsade i origo.

Bevis. Låt B vara mängden av alla kontinuerliga funktioner f med perioden 2π och sätt $\|f\| = \sup |f|$. Då är B ett Banachrum. Fourierkoefficienterna för f är

$$c_k = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

och delsummorna är

$$s_n(f, x) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Speciellt är

$$s_n(f, 0) = \sum_{-n}^{n} c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x)\, dx$$

där

$$D_n(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{-n}^{n} e^{ikx} = (2\pi)^{-1} \sin\,(n+\tfrac{1}{2})x/\sin \tfrac{x}{2}.$$

Normen av den lineära formen $f \to s_n(f,0)$ på B är lika med $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n|\, dx$. (Se 3) sid. 19.) Genom att dela integrationsintervallet där $(n+1/2)x = k\pi$ med k heltal får vi eftersom $|\sin x/2| \leq |x/2|$ att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n|\, dx \geq 4\pi^{-2} \sum_{1}^{n} 1/k = 4 \log n/\pi^2 + O(1).$$

Alltså går normen av de lineära formerna $f \to s_n(f, 0)$ mot oändligheten med n, varför enligt sats 2.3.16 mängden av de f för vilka delsummorna av Fourierserien är begränsade i origo är av första kategorin.

Exempel 2. Låt M_n vara en positiv talföljd så att $M_n/\log n \to 0$ då $n \to \infty$. Då existerar en kontinuerlig funktion f med perioden 2π för vilken $s_n(f, x)/M_n$ är obegränsad då $n \to \infty$ för varje rationellt tal x.

Vi lämnar beviset som övning; huvudpunkten finns i exempel 1.

Exempel 3. Låt a_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots)$ vara en matris vars element är 0 då $j < k$. För varje talföljd $s_1, s_2, \ldots$ sätter vi

$$(As)_j = \sum_k a_{jk} s_k, \quad j = 1, 2, \ldots$$

och säger att talföljden s_k är summabel med metoden (A) om $(As)_j$ har ett gränsvärde då $j \to \infty$. Då gäller att varje konvergent följd är summabel A med samma gränsvärde om och endast om för någon konstant M

(2.3.3) $\quad \sum_k |a_{jk}| < M, \quad j = 1, 2, \ldots,$

(2.3.4) $\quad \lim_{j\to\infty} a_{jk} = 0$ för fixt k, $\quad \lim_{j\to\infty} \sum_k a_{jk} = 1.$

Bevis. Nödvändigheten av (2.3.4) följer genom att betrakta sviten s som är 1 för index k och 0 annars, respektive sviten som är identiskt lika med 1. För att visa nödvändigheten av (2.3.3) betraktar vi rummet B av alla sviter $s_n \to 0$, normerade med maximum av absolutbeloppet. Avbildningen

$$s \to (As)_j \in \mathbb{C}$$

är då för fixt j en lineär form med normen $\sum_k |a_{jk}|$, och då den skall vara konvergent då $j \to \infty$ för varje $s \in B$ så följer av Banach-Steinhaus sats att normerna måste vara likformigt begränsade, alltså att (2.3.3) gäller. - Tillräckligheten bevisas så: På grund av (2.3.4) räcker det att betrakta sviter $s_n \to 0$. För varje $\varepsilon > 0$ gäller då $|s_n| < \varepsilon$ för stora n. Med hjälp av (2.3.3) och första delen av (2.3.4) får vi då genast att $|(As)_j| \leq M\varepsilon + \varepsilon$ om j är tillräckligt stort, vilket bevisar påståendet (som är en sats av Toeplitz).

2.4. Lineära avbildningar med ändligt index. Låt T vara en kontinuerlig lineär avbildning av ett Banachrum B_1 in i ett annat Banachrum B_2. Kärnan

$$K_T = \{x;\ x \in B_1,\ Tx = 0\}$$

är då ett slutet underrum av B_1. Detta behöver emellertid inte vara fallet för värdeförrådet. (Exempel: B_1 och B_2 = kontinuerliga funktioner i $[0, 1]$, T = integration från 0 till x eller multiplikation med x.) Emellertid kan vi lätt bevisa:

Sats 2.4.1. Om $T \in L(B_1, B_2)$ och codim $W_T < \infty$ så är W_T slutet.

Bevis. Vi kan anta att T är en-entydig för annars behöver vi bara övergå till den avbildning av B_1/K_T i B_2 som induceras av T. Låt $y_1, \ldots, y_n$

vara element i B_2 vars restklasser modulo W_T bildar en bas i B_2/W_T. Varje element $y \in B_2$ kan då på ett och endast ett sätt skrivas

$$(2.4.1) \qquad y = \sum_1^n a_j y_j + Tx$$

med $x \in B_1$ och skalärer a_j. Avbildningen

$$y \to (x, a_1, \ldots, a_n) \in B_1 \times E^n$$

är alltså entydig, lineär och dessutom sluten eftersom (2.4.1) bibehålls vid konvergens av y, a_j och x. Alltså är den enligt satsen om den slutna grafen kontinuerlig, varför speciellt lineärformerna $y \to a_j$ är kontinuerliga. Eftersom W_T definieras av villkoren $a_j = 0$ följer att W_T är slutet.

<u>Övning.</u> Visa att satsen också gäller om T bara är sluten, ej nödvändigtvis kontinuerlig.

Vi erinrar om att enligt definition 1.2.6 sägs T ha ändligt index om dim K_T och codim W_T är ändliga, och index definieras då av

$$\nu(T) = \dim K_T - \operatorname{codim} W_T.$$

Vi skall studera stabiliteten av index vid störningar av operatorn T. Först ger vi en alternativ karakterisering av operatorer med ändligt index.

<u>Sats 2.4.2.</u> Följande villkor på operatorn $T \in L(B_1, B_2)$ är ekvivalenta:

1) T har ändligt index.

2) Det existerar en operator $U \in L(B_2, B_1)$ så att

$$TU = I_2 - K_2, \quad UT = I_1 - K_1$$

där I_j är den identiska operatorn i B_j och K_j har ändlig rang.

3) Det existerar operatorer U_1 och $U_2 \in L(B_2, B_1)$ så att U_1T och TU_2 har ändligt index.

<u>Bevis.</u> Att 2) medför 3) följer av den rent algebraiska sats 1.2.5; operatorerna $I_j - K_j$ har till och med index 0. Att 3) medför 1) är också

ganska självklart, för $K_T \subset K_{U_1T}$ som har ändlig dimension och $W_T \supset W_{TU_2}$ som har ändlig codimension. Det återstår därför bara att visa att 1) medför 2).

Då K_T har ändlig dimension finns enligt sats 2.2.7 en kontinuerlig projektion av B_1 på K_T. Alltså finns ett slutet underrum F av B_1 så att B_1 är direkt topologisk summa av K_T och F. Eftersom W_T är slutet och har ändlig codimension existerar vidare en kontinuerlig projektion P av B_2 på W_T.

Inskränkningen av T till Banachrummet F är en en-entydig lineär kontinuerlig avbildning av F på W_T. Enligt Banachs sats finns alltså en invers $V \in L(W_T, F)$. Nu sätter vi $U = VP$ och påstår att 2) blir uppfylld. Betrakta först

$$UTx - x = VPTx - x = VTx - x.$$

Detta är noll då $x \in F$ enligt definitionen av V, varför kärnan av $K_1 = I_1 - UT_1$ har ändlig codimension så att K_1 har ändlig rang. Betrakta nu för $y \in B_2$

$$TUy - y = TVPy - y = Py - y.$$

Om $y \in W_T$ är $Py = y$ och kärnan för $K_2 = I_2 - TU$ har alltså ändlig codimension. Detta bevisar 2).

Vi kan nu bevisa en första stabilitetssats för index.

<u>Sats 2.4.3.</u> Låt $T \in L(B_1, B_2)$ ha ändligt index. Då existerar ett $\varepsilon > 0$ så att varje $T' \in L(B_1, B_2)$ med $\|T' - T\| < \varepsilon$ också har ändligt index och

$$\nu(T') = \nu(T).$$

Före beviset studerar vi ett enkelt specialfall.

<u>Lemma 2.4.4.</u> Låt I vara identiska operatorn i Banachrummet B och låt S vara en operator med $\|S\| < 1$ som tillhör $L(B, B)$. Då har $I - S$ en invers i $L(B, B)$.

Bevis. Serien $\sum_{0}^{\infty} S^k$ konvergerar eftersom somman av normerna är konvergent. Men det följer genast genom multiplikation med I-S i delsummorna att summan är en invers till I - S.

Bevis för sats 2.4.3. Välj U enligt 2) i sats 2.4.2. Sätt $T' = T+S$. Då får vi

$$T'U = I_2 + SU - K_2, \quad UT' = I_1 + US - K_1.$$

När $\|S\| < \varepsilon = 1/\|U\|$ har operatorerna I_2+SU och I_1+US inverser enligt lemma 2.4.4, och vi kan då skriva

$$T'U = (I_2+SU)(I_2-(I_2+SU)^{-1}K_2), \quad UT' = (I_1-K_1(I_1+US)^{-1})(I_1+US).$$

Eftersom operatorn $(I_2+SU)^{-1}K_2$ har ändlig rang och I_2+SU är en en-entydig avbildning av B_2 på sig så har operatorn $T'U$ index 0 ((sats 1.2.5)) och analogt ser vi att UT' har index 0. Enligt 3) i sats 2.4.2 har därför T' ändligt index. Den logaritmiska lagen (sats 1.2.7) ger nu

$$\nu(T') + \nu(U) = \nu(T'U) = 0.$$

Speciellt gäller detta för $T = T'$, vilket bevisar att $\nu(T) = \nu(T')$.

Övning. Visa analogt att om T är en lineär avbildning med ändligt index av ett vektorrum V_1 in i ett annat V_2 (ingen topologi) och om S har ändlig rang så är $\nu(T+S) = \nu(T)$.

Vi skall nu studera störningar av operatorer med ändligt index som är små i en annan mening än i sats 2.4.3.

Definition 2.4.5. En lineär avbildning T av B_1 in i B_2 kallas fullständigt kontinuerlig (eller kompakt) om för varje följd $x_n \in B_1$ med $\|x_n\|_1 \leq 1$ det är möjligt att välja en konvergent delföljd ur följden Tx_n.

Fullständig kontinuitet medför kontinuitet (bevisa detta). Termen kompakt syftar givetvis på att bilden av enhetsklotet i B_1 enligt definitionen är relativt kompakt i B_2.

Exempel. Låt B_1 vara mängden av alla kontinuerligt deriverbara funktioner f i intervallet $[0, 1]$ med normen $\max |f| + \max |f'|$, och låt B_2 vara mängden av alla kontinuerliga funktioner f i detta intervall med normen $\max |f|$. Inklusionsavbildningen $B_1 \to B_2$ är då fullständigt kontinuerlig enligt Ascolis sats. (Genomför beviset som övning.)

Om rangen för den kontinuerliga operatorn T är ändlig så är T självklart fullständigt kontinuerlig. Att det finns kontinuerliga operatorer som inte är fullständigt kontinuerliga framgår av följande sats.

Sats 2.4.6. Om den identiska operatorn i Banachrummet B är fullständigt kontinuerlig så har B ändlig dimension.

Beviset kräver några förberedelser.

Lemma 2.4.7. Om $E_1 \subset E_2$ är två normerade rum sådana att $E_1 \neq E_2$ och E_1 är slutet i E_2 så kan man finna $x \in E_2$ så att $||x|| = 1$ och $||x-y|| > 1/2$ för varje $y \in E_1$, dvs. avståndet från x till E_1 är åtminstone $1/2$.

Bevis. Välj $x_0 \in E_2$ så att $x_0 \notin E_1$. Eftersom E_1 är sluten har vi

$$d = \inf_{y \in E_1} ||x_0 - y|| > 0.$$

Tag $y_0 \in E_1$ så att $||x_0 - y_0|| < 2d$. Om vi sätter $x = (x_0 - y_0)/||x_0 - y_0||$ får vi $||x|| = 1$ och $||x-y|| > 1/2$ för alla $y \in E_1$.

Övning. Visa att om E_1 har ändlig dimension så kan man välja x med $||x|| = 1$ och $||x-y|| \geq 1$ för varje $y \in E_1$.

Lemma 2.4.8. Om $x_1, x_2, \ldots$ är en följd av lineärt oberoende element i det normerade rummet B så kan man finna $x_1', x_2', \ldots$ så att x_j' är en lineärkombination av $x_1, \ldots, x_j$ och $||x_k'|| = 1$, $||x_k' - x_j'|| > 1/2$ då $k \neq j$.

<u>Bevis.</u> Låt B_j vara rummet som spänns av lineärkombinationerna av $x_1, \ldots, x_j$. Då växer B_j strängt med j varför man kan finna $x_j' \in B_j$ med $\|x_j'\| = 1$ och avstånd $> 1/2$ till B_{j-1}. Detta bevisar lemmat.

<u>Bevis för sats 2.4.6.</u> Om B har oändlig dimension så kan man välja en svit x_j' med egenskaperna i lemmat. Den kan uppenbarligen inte ha någon konvergent delföljd varför den identiska operatorn i B inte är fullständigt kontinuerlig.

<u>Sats 2.4.9.</u> De fullständigt kontinuerliga lineära transformationerna av B_1 in i B_2 bildar ett slutet underrum av $L(B_1, B_2)$. Sammansättningen av en fullständigt kontinuerlig och en kontinuerlig lineär transformation är fullständigt kontinuerlig.

Beviset lämnas som övning.-Vi skall närmast bevisa den andra satsen om störningar av operatorer med ändligt index.

<u>Sats 2.4.10.</u> Låt $T \in L(B_1, B_2)$ ha ändligt index och låt K vara en fullständigt kontinuerlig lineär transformation av B_1 in i B_2. Då har T+K också ändligt index och $\nu(T+K) = \nu(T)$.

Denna viktiga sats är av Fredholm och Riesz då $B_1 = B_2$ och $T = I$. Det allmänna fallet har visats av många författare, troligtvis först av Atkins(Vi studerar först kärnan till T+K.

<u>Lemma 2.4.11.</u> Om förutsättningarna i sats 2.4.10 är uppfyllda så kan man för varje $\lambda \in \mathbb{R}$ finna ett slutet underrum F_λ i B_1 med ändlig codimension så att

$$(2.4.2) \qquad \|x\|_1 \leq C\|(T+\lambda K)x\|, \quad x \in F_\lambda .$$

Speciellt har alltså kärnan för $T+\lambda K$ ändlig dimension.

Bevis. Låt F_0 vara ett slutet underrum i B_1 med ändlig codimension så att B_1 är direkt summa av K_T och F_0. (Existensen följer av sats 2.2.7; jämför beviset för sats 2.4.2.) Eftersom T avbildar F_0 en-entydigt på det slutna rummet W_T så får vi av Banachs sats

$$(2.4.3) \qquad \|x\|_1 \leq C\|Tx\|_2, \; x \in F_0.$$

Vi skall nu bevisa att

$$N_\lambda = \{x;\ x \in F_0,\ (T+\lambda K)x = 0\}$$

har ändlig dimension. Låt därför $x_j \in N_\lambda$, $\|x_j\|_1 = 1$, $j = 1, 2, \ldots$ Efter ett urval kan vi anta att Kx_j konvergerar, och får av (2.4.3)

$$\|x_i - x_j\|_1 \leq C\|Tx_i - Tx_j\|_2 = C|\lambda|\,\|Kx_i - Kx_j\|_2 \to 0 \text{ då } i \text{ och } j \to \infty.$$

Alltså konvergerar följden x_j. Detta innebär att den identiska operatorn i N_λ är fullständigt kontinuerlig varför $\dim N_\lambda < \infty$ enligt sats 2.4.6. Välj nu (återigen enligt sats 2.2.7) ett slutet underrum F_λ av F_0 så att F_0 är direkt summa av F_λ och N_λ. Då gäller (2.4.2). För annars kunde vi finna en följd $x_j \in F_\lambda$ med $\|x_j\|_1 = 1$ så att $Tx_j + \lambda Kx_j \to 0$. Efter urval kan vi anta att Kx_j konvergerar och får då som ovan att x_j har ett gränsvärde $x \in F_\lambda$. Då $\|x\|_1 = 1$ och $Tx + \lambda Kx = 0$, alltså $x \in N_\lambda$, ger detta en motsägelse, vilket bevisar lemmat.

Bevis för sats 2.4.10. Låt L vara mängden av alla $\lambda \in \mathbb{R}$ för vilka $T+\lambda K$ har ändligt index lika med $\nu(T)$. Enligt sats 2.4.3 är L öppen, och $0 \in L$ enligt förutsättning. För att visa att $L = (-\infty, +\infty)$ räcker det att visa att L är sluten. Låt därför $\lambda \in \bar{L}$. Om $|\lambda - \mu| < \varepsilon = (2C\|K\|)^{-1}$ följer av (2.4.2) och triangelolikheten att

$$(2.4.4) \qquad \|x\|_1 \leq 2C\|(T+\mu K)x\|_2, \; x \in F_\lambda,$$

varav följer att

$$\dim K_{T+\mu K} \leqq \operatorname{codim} F_\lambda \quad \text{då } |\mu-\lambda| < \varepsilon.$$

Om $|\mu-\lambda| < \varepsilon$ och $\mu \in L$ får vi därför

$$\operatorname{codim} W_{T+\mu K} = \dim K_{T+\mu K} - \nu(T+\mu K) \leqq \operatorname{codim} F_\lambda - \nu(T).$$

Värdeförrådet av restriktionen av $T+\mu K$ till F_λ har därför en codimension $\leqq 2\operatorname{codim} F_\lambda - \nu(T) = N$ då $|\mu-\lambda| < \varepsilon$ och $\mu \in L$. Vi vill bevisa att också $\operatorname{codim} W_{T+\lambda K}$ är $\leqq N$. Låt därför G vara ett underrum av B_2 av dimensionen $N+1$. För varje $\mu \in L$ med $|\mu-\lambda| < \varepsilon$ kan vi välja $x_\mu \in F_\lambda$ så att $0 \neq (T+\mu K)x_\mu \in G$. Vi kan normera så att $\|(T+\mu K)x_\mu\|_2 = 1$, vilket enligt (2.4.4) medför att $\|x_\mu\|_1 \leqq 2C$. Välj nu en följd $\mu_j \to \lambda$ så att $(T+\mu_j K)x_{\mu_j}$ har ett gränsvärde $y \in G$, vilket är möjligt eftersom G har ändlig dimension. Vi har då $\|y\|_2 = 1$ och som $(T+\lambda K)x_{\mu_j}$ konvergerar så följer av (2.4.2) att x_{μ_j} har ett gränsvärde $x \in F_\lambda$, och det är klart att $(T+\lambda K)x = y$. Alltså är $\operatorname{codim} W_{T+\lambda K} \leqq N$, vilket bevisar att $T+\lambda K$ har ändligt index. Men enligt sats 2.4.3 har $T+\mu K$ samma index för alla μ i en omgivning av λ, varför $\nu(T+\lambda K) = \nu(T)$ och $\lambda \in L$. Beviset är fullbordat.

<u>Exempel.</u> Låt a och b vara kontinuerliga i $[0, 1]$, och betrakta randvärdesproblemet

$$u''+au'+bu = f, \quad u(0) = u(1) = 0$$

där $u \in C^2$ och f är kontinuerlig i $[0, 1]$. Då är antalet villkor på f för lösbarhet lika med antalet lineärt oberoende lösningar då $f = 0$, alltså högst lika med 1.

<u>Bevis.</u> Låt B_1 vara rummet av funktioner u som tillhör C^2 i $[0,1]$ med

$u(0) = u(1) = 0$ och med normen

$$\|u\|_1 = \sup\,(|u|+|u'|+|u''|).$$

Låt B_2 vara rummet av kontinuerliga funktioner i $[0, 1]$ normerade med maximum av absolutbeloppet. Då är B_1 och B_2 Banachrum. Betrakta nu avbildningarna

$$B_1 \ni u \xrightarrow{T} u'' \in B_2 \qquad B_1 \ni u \xrightarrow{K} au'+bu \in B_2.$$

T är kontinuerlig och avbildar B_1 en-entydigt på B_2, har alltså index 0. Vidare är K fullständigt kontinuerlig (följer av Ascolis sats). Alltså har T+K index 0, vilket bevisar påståendet. - Om exempelvis $a = 0$ och $b \leq 0$ så följer genom multiplikation med $\bar{u}$ och partialintegration att en lösning till det homogena problemet måste vara identiskt noll. Alltså är det inhomogena problemet alltid lösbart då.

Utöver invariansen av $\nu(T+\lambda K)$ som bevisats i sats 2.4.10 skall vi nu studera dim $K_{T+\lambda K}$ och codim $W_{T+\lambda K}$ som funktion av λ. Först studerar vi det klassiska fallet.

Lemma 2.4.12. Låt K vara en fullständigt kontinuerlig operator av Banachrummet B i sig och låt I vara den identiska operatorn i B. Då är mängden av alla skalärer λ med $K_{I+\lambda K} \neq \{0\}$ en diskret mängd.

Bevis. I annat fall existerar en begränsad följd av olika λ_n så att $K_{I+\lambda_n K} \neq \{0\}$. Välj x_n med $\|x_n\| = 1$ så att $x_n + \lambda_n K x_n = 0$. Då är elementen $x_1, x_2, \ldots$ lineärt oberoende. För antag att $x_1, \ldots, x_n$ är lineärt beroende medan $x_1, \ldots, x_{n-1}$ är lineärt oberoende. Vi har då

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

med a_n och något a_j med $j < n$ skilda från 0. Om vi opererar med K på denna ekvation får vi

$$a_1\lambda_1^{-1}x_1 + \ldots + a_n\lambda_n^{-1}x_n = 0.$$

Eftersom alla λ_j är olika kan vi nu eliminera x_n och få en icke trivial lineär relation mellan $x_1, \ldots, x_{n-1}$, vilket är en motsägelse. Om vi med E_n betecknar mängden av lineärkombinationer av $x_1, \ldots, x_n$ så är alltså E_n strängt växande med n, vi har $KE_n \subset E_n$ och $(I+\lambda_n K)E_n \subset E_{n-1}$ för varje n. Enligt lemma 2.4.7 kan vi välja $x_n' \in E_n$ med $\|x_n'\| = 1$ så att avståndet från x_n' till E_{n-1} är minst 1/2. Nu har vi för $m < n$

$$\lambda_m Kx_m' - \lambda_n Kx_n' = x_n' + \xi, \quad \xi = \lambda_m Kx_m' - (I+\lambda_n K)x_n',$$

och eftersom $\xi \in E_{n-1}$ får vi

$$\|\lambda_m Kx_m' - \lambda_n Kx_n'\| \geqq 1/2, \; m < n.$$

Följden $\lambda_n Kx_n'$ saknar alltså konvergent delföljd vilket strider mot antagandena att K är fullständigt kontinuerlig och $|\lambda_n|$ begränsad.

Sats 2.4.1 3. Låt $T \in L(B_1, B_2)$ ha ändligt index och låt K vara en fullständigt kontinuerlig lineär avbildning av B_1 in i B_2. Sätt

$$k = \min \dim K_{T+\lambda K} \quad , \quad w = \min \operatorname{codim} W_{T+\lambda K}.$$

Då är $\dim K_{T+\lambda K} = k$ och $\operatorname{codim} W_{T+\lambda K} = w$ utom då λ tillhör en diskret mängd.

Bevis. Vi kan anta att $\dim K_T = k$, för annars kan vi ersätta T med $T+\lambda K$ för lämpligt λ och åstadkomma denna situation. På grund av sats 2.4.10 räcker det att bevisa att $\dim K_{T+\lambda K} \leqq k$ för alla λ utanför en diskret mängd. Som i beviset för sats 2.4.2 väljer vi ett slutet underrum F i B_1 så att B_1 är direkt topologisk summa av F och K_T och låter Q vara projektionen på F längs K_T. Låt vidare P vara en kontinuerlig projektion av B_2

på W_T. Som i beviset för sats 2.4.2 finns en operator $V \in L(W_T, F)$ sådan att TV är identiteten på W_T och VT är identiteten på F. Vi sätter åter $U = VP$. Då är $UTx = VPTx = VTx = x$ om $x \in F$. Av ekvationen $(T+\lambda K)x = 0$ följer att $QU(T+\lambda K)x = 0$, dvs.

$$UTx + \lambda QUKx = 0.$$

Nu är restriktionen av UT till F lika med identitetsoperatorn på F och restriktionen av QUK till F är en fullständigt kontinuerlig lineär operator från F till F. Enligt lemma 2.4.12 är därför $\{x;\ x \in F,\ (T+\lambda K)x = 0\} = \{0\}$ utom då λ tillhör en diskret mängd, och vi har då

$$\dim K_{T+\lambda K} \leqq \operatorname{codim} F = \dim K_T = k,$$

vilket fullbordar beviset.

Slutligen visar vi i det klassiska fallet ett resultat som har nära samband med Jordans normalform i det ändligdimensionella fallet.

<u>Sats 2.4.14.</u> Låt K vara en fullständigt kontinuerlig lineär avbildning av Banachrummet B i sig och låt I vara den identiska operatorn i B. Då är

$$N_\lambda = \{x \in B;\ (I+\lambda K)^n x = 0 \text{ för något } n\}$$

ett ändligdimensionellt underrum av B vars element kallas generaliserade egenvektorer för K till egenvärdet $-1/\lambda$. Det finns ett slutet underrum F_λ som avbildas en-entydigt på sig själv av $I+\lambda K$ så att B är direkt topologisk summa av N_λ och F_λ. Även F_λ är entydigt bestämt.

<u>Bevis.</u> Vi kan anta att $\lambda = 1$. Låt B_n vara kärnan och W_n värdeförrådet för $(I+K)^n$. Då växer B_n med n medan W_n avtar; vi har $N_\lambda = \bigcup_1^\infty B_n$ medan $F_\lambda \subset \bigcap_1^\infty W_n$. Vi påstår att det finns ett tal m så att $B_n = B_m$ och $W_n = W_m$

för $n \geq m$. Eftersom dim B_n = codim W_n är dessa båda påståenden ekvivalenta. Observera först att om $W_m = W_{m+1}$ för något m så avbildar I+K rummet W_m på sig självt och det följer att $W_n = W_m$ för alla $n > m$. Det gäller därför att bevisa att det inte kan inträffa att alla rummen W_n är olika, dvs. att alla rummen B_n är olika. I så fall kan vi enligt lemma 2.4.7 finna $x_n \in B_n$ så att $\|x_n - x\| > 1/2$ då $x \in B_{n-1}$. Vi får då om $m < n$

$$Kx_m - Kx_n = x_n + \xi \ , \quad \xi = Kx_m - (I+K)x_n,$$

och då ξ uppenbart tillhör B_{n-1} följer att $\|Kx_m - Kx_n\| > 1/2$ då $m < n$. Alltså saknar följden Kx_n konvergent delföljd, vilket är en motsägelse. Alltså är $N_\lambda = B_m$ för lämpligt m, och I+K avbildar W_m på sig själv. Då $F_\lambda \subset W_m$ och B är direkt summa av F_λ och N_λ måste vi ha $F_\lambda = W_m$, vilket fullbordar beviset, eftersom $N \cap W_m = \{0\}$ och dim N_λ = codim W_m så att B verkligen är direkt summa av W_m och N_λ.

2.5. Dualitet. Låt B vara ett Banachrum (över $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$). Då är rummet $L(B; \mathbb{C})$ (resp. $L(B, \mathbb{R})$) av de kontinuerliga lineärformerna på B ett Banachrum (fullständigheten följer av att skalärkroppen är fullständig och gäller alltså även om B ej är fullständigt). Rummet kallas dualrummet till B och betecknas med B' eller B^*.

Om $x \in B$ och $\xi \in B^*$ så betecknar vi i fortsättningen värdet av lineärformen ξ för argumentet x med $\langle x, \xi\rangle$ i stället för $\xi(x)$. Eftersom ξ är en lineärform så är $\langle x, \xi\rangle$ lineär i x för fixt ξ. På grund av definitionen av addition av lineärformer är den också lineär i ξ för fixt x. Funktionen

$$B \times B^* \ni (x, \xi) \longrightarrow \langle x, \xi\rangle$$

är alltså bilineär. Varje kontinuerlig lineärform på B kan för ett och endast ett $\xi \in B^*$ skrivas i formen $x \rightarrow \langle x, \xi\rangle$ men vi skall se nedan att det kan finnas kontinuerliga lineärformer på B^* som inte kan skrivas i formen $\xi \to \langle x, \xi\rangle$ för något $x \in B$.

Definitionen av normen av en lineärform innebär att för varje $\xi \in B^*$

$$(2.5.1) \qquad \|\xi\| = \sup_{0 \neq x \in B} |\langle x, \xi\rangle| / \|x\| .$$

(Vi använder samma beteckning för normen i B och i B^* vilket inte bör vålla något missförstånd eftersom element i B betecknas med latinska alfabetet och element i B^* med grekiska alfabetet.)

<u>Sats 2.5.1.</u> För varje $x \in B$ gäller

$$(2.5.2) \qquad \|x\| = \sup_{0 \neq \xi \in B} |\langle x, \xi\rangle| / \|\xi\| .$$

<u>Bevis.</u> Enligt (2.5.1) har vi $|\langle x, \xi\rangle| \leqq \|x\| \, \|\xi\|$ för alla $x \in B$ och $\xi \in B^*$. Alltså är

$$\sup_{\xi} |\langle x, \xi\rangle| / \|\xi\| \leqq \|x\| .$$

Å andra sidan kan vi enligt Hahn-Banachs sats finna en lineärform ξ med normen 1 så att dess värde i x är lika med $\|x\|$. Detta bevisar (2.5.2) och ger också att supremum i (2.5.2) antages. (Detta behöver ej vara fallet i (2.5.1).)

Satsen innebär att B på naturligt sätt är isometriskt inbäddad i B^{**}.

<u>Definition 2.5.2.</u> Om $B = B^{**}$, dvs. om varje kontinuerlig lineärform på B^* kan skrivas $\xi \to \langle x, \xi\rangle$ för något $x \in B$, så kallas B reflexivt.

<u>Sats 2.5.3.</u> För varje $T \in L(B_1, B_2)$ existerar en och endast en operator $T^* \in L(B_2^*, B_1^*)$ så att

$$(2.5.3) \qquad \langle Tx, \eta\rangle_2 = \langle x, T^*\eta\rangle_1, \; x \in B_1, \; \eta \in B_2^*,$$

där $\langle \;, \; \rangle_j$ betecknar den bilineära formen i $B_j \times B_j^*$. Operatorerna T och T^* har samma norm.

<u>Bevis.</u> För fixt $\eta \in B_2^*$ är avbildningen

$$B_1 \ni x \longrightarrow \langle Tx, \eta \rangle_2$$

en lineärform med norm $\leq \|T\| \, \|\eta\|_2$. Alltså existerar ett och endast ett $\xi \in B_1^*$ så att

$$\langle Tx, \eta \rangle_2 = \langle x, \xi \rangle_1, \; x \in B_1.$$

Avbildningen $\eta \to \xi$ är lineär och dess norm är $\leq \|T\|$. Alltså finns en entydigt bestämd operator som uppfyller (2.5.3), och $\|T^*\| \leq \|T\|$. Men om vi dividerar (2.5.3) med $\|x\|_1 \|\eta\|_2$ och tar supremum över ξ och η med användning av (2.5.1) och (2.5.2) så inses genast att likhet gäller.

<u>Definition 2.5.4.</u> Operatorn T^* som bestäms av (2.5.3) kallas den adjungerade operatorn till T.

<u>Övning.</u> Visa att $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$. (Precisera förutsättningarna.)

Vi skall studera sambanden mellan egenskaperna hos T och hos T^*. Som hjälpmedel behöver vi en beskrivning av dualrummet till ett underrum och till ett faktorrum.

<u>Sats 2.5.5.</u> Låt B_1 vara ett slutet underrum av Banachrummet B och låt $B_1^\circ \subset B^*$ vara mängden av alla $\xi \in B^*$ med $\langle x, \xi \rangle = 0$ för alla $x \in B_1$. (B_1° kallas annihilatorn eller ortogonalrummet till B_1.) Då finns naturliga lineära isometrier mellan

a) dualrummet till B_1 och kvotrummet B^*/B_1°.

b) dualrummet till kvotrummet B/B_1 och B_1°.

Sammanfattande kan man alltså säga att operationerna att ta kvotrum och underrum är duala.

<u>Bevis för sats 2.5.5.</u> a) Varje kontinuerlig lineärform på B_1 kan utvidgas

till B med samma (men omöjligt mindre) norm. Två lineärformer på B sammanfaller på B_1 om och endast om de skiljer sig med ett element i $B_1^{\,o}$. Alltså kan de kontinuerliga lineärformerna på B_1 en-entydigt tillordnas restklasserna av B^* med avseende på $B_1^{\,o}$, och denna tillordning är isometrisk och lineär.

b) En lineärform på B/B_1 är det samma som en lineärform på B som försvinner på B_1 och enligt definitionen av normen i ett kvotrum är dess norm som lineärform på B/B_1 och som lineärform på B lika.

Som övning lämnar vi beviset för följande variant av sats 2.5.5.

Sats 2.5.6. Låt med beteckningarna i sats 2.5.5 T_1 vara den naturliga avbildningen av B i B/B_1 och T_2 vara den naturliga avbildningen av B_1 i B. Då är T_1^* den naturliga avbildningen av $B_1^{\,o}$ i B^* och T_2^* är den naturliga avbildningen av B^* i $B^*/B_1^{\,o}$.

Sats 2.5.7. Om B_1 är ett lineärt underrum av Banachrummet B och $B_1^{\,o}$ är ortogonalrummet till B_1 i B^* så är ortogonalrummet $B_1^{\,oo}$ till $B_1^{\,o}$ i B lika med slutna höljet $\overline{B_1}$ av B_1.

Bevis. Det är självklart att $B_1^{\,oo} \supset B_1$ och att $B_1^{\,oo}$ är slutet, alltså att $B_1^{\,oo} \supset \overline{B}_1$. Låt nu $x \in B$ men $x \notin \overline{B}_1$. Enligt Hahn-Banachs sats (sats 2.2.3) kan vi då finna $\xi \in B^*$ så att $\xi \in B_1^{\,o}$ men $\langle x, \xi \rangle \neq 0$. Detta bevisar satsen.

Observera att om man startar med ett underrum av B^* och tar dess ortogonalrum i B, därefter dettas ortogonalrum i B^* så kan man få ett rum som är större än höljet av det rum man utgick från. (Se vidare paragraf 3.2.)

Sats 2.5.8. Låt $T \in L(B_1, B_2)$ och antag att W_T är slutet. Då är W_{T^*} slutet, ortogonalrummet till K_T är W_{T^*} och ortogonalrummet till W_T är K_{T^*}.

Anmärkning. Det är också sant att W_T måste vara slutet om W_{T^*} är slutet.

Vi kan emellertid inte bevisa det förrän i paragraf 3.2.

<u>Bevis för sats 2.5.8.</u> Antag först att $K_T = \{0\}$ och att $W_T = B_2$. Enligt Banachs sats har då T en begränsad invers S, alltså

$$ST = I_1, \quad TS = I_2.$$

Detta medför att

$$T^* S^* = I_1^*, \quad S^* T^* = I_2^*$$

varför $W_{T^*} = B_1^*$ och $K_{T^*} = \{0\}$.

I det allmänna fallet kan vi skriva $T = T_3 T_2 T_1$ där T_1 är den naturliga avbildningen av B_1 på B_1/K_T, T_2 är den en-entydiga avbildning av B_1/K_T på W_T som induceras av T, och T_3 är den naturliga avbildningen av W_T i B_2. Vi får då $T^* = T_1^* \; T_2^* \; T_3^*$, där T_1^* är inklusionsavbildningen av $K_T^{\,0}$ i B_1^*, T_2^* enligt första delen av beviset en en-entydig avbildning av $B_2^*/W_T^{\,0}$ på $K_T^{\,0}$ samt T_3^* är kanoniska avbildningen av B_2^* i $B_2/W_T^{\,0}$. Härav följer genast att $W_{T^*} = K_T^{\,0}$ och att $K_{T^*} = W_T^{\,0}$, vilket bevisar satsen.

<u>Övning.</u> Visa att om $T \in L(B_1, B_2)$ har ändlig rang så har T^* ändlig rang.

I anslutning till övningen bevisar vi följande mindre triviala sats.

<u>Sats 2.5.9.</u> Om $T \in L(B_1, B_2)$ är fullständigt kontinuerlig så är T^* fullständigt kontinuerlig.

<u>Lemma 2.5.10.</u> Om $T \in L(B_1, B_2)$ är fullständigt kontinuerlig så finns en uppräknelig tät delmängd av W_T.

<u>Bevis.</u> Låt $A = \{Tx;\ \|x\|_1 \leq 1\}$. Vi har $W_T = \bigcup_1^\infty (nA)$, varför det räcker att bevisa att A och alltså nA innehåller en uppräknelig tät delmängd. Detta följer av att A är relativt kompakt. För till varje n kan man finna ändligt många $y_1, \ldots, y_N \in A$ så att $\|y_j - y_k\|_2 \geq 1/n$ om $j \neq k$ medan till

varje $y \in A$ finns något k för vilket $\|y-y_k\|_2 < 1/n$. I annat fall kunde vi nämligen finna en oändlig svit $y_j \in A$ så att $\|y_j-y_k\| \geq 1/n$ om $j \neq k$, vilket strider mot existensen av en konvergent delföljd. Om vi för $n = 1, 2, \ldots$ söker upp sådana punkter $y_1^n, \ldots, y_{N(n)}^n$ så bildar mängden av alla så erhållna punkter en uppräknelig tät delmängd av A.

<u>Bevis för sats 2.5.9.</u> Låt η_n vara en följd av element i B_2^* med $\|\eta_n\|_2 \leq 1$. För varje fixt $y \in B_2$ kan vi finna en delföljd η_{n_k} så att

$$\lim_{k\to\infty} \langle y, \eta_{n_k}\rangle_2 \tag{2.5.4}$$

existerar. Med Cantors diagonalförfarande kan vi välja delföljden så att gränsvärdet existerar för varje y i den täta mängden i lemma 2.5.10. Då existerar gränsvärdet (2.5.4) för varje $y \in \overline{W_T}$. Vid beviset av detta kan vi för att förenkla beteckningarna anta att $n_k = k$. Om $y \in W_T$ och y' är i den täta delmängden i lemma 2.5.10 har vi då

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} |\langle y, \eta_n\rangle_2 - \langle y, \eta_m\rangle_2| \leq \overline{\lim_{n,m\to\infty}} |\langle y', \eta_n\rangle_2 - \langle y', \eta_m\rangle_2| + 2\|y-y'\|_2 =$$
$$= 2\|y-y'\|_2 .$$

Då y' kan väljas så att $\|y-y'\|_2$ är godtyckligt litet följer att gränsvärdet (2.5.4) existerar för varje $y \in \overline{W_T}$.

Om nu $T^*\eta_n$ inte vore en Cauchyföljd så kunde vi finna sviter n_k och m_k av heltal som $\to \infty$ så att för något $c > 0$ gäller

$$\|T^*\eta_{n_k} - T^*\eta_{m_k}\|_1 \geq 2c \text{ för alla k.}$$

Vi kan välja $x_k \in B_1$ så att $\|x_k\|_1 = 1$ och

$$|\langle x_k, T^*\eta_{n_k} - T^*\eta_{m_k}\rangle_1| > c > 0 \text{ för alla k.}$$

Ur följden Tx_k kan en konvergent delföljd utväljas eftersom T är fullständigt kontinuerlig. Vi kan anta beteckningarna så valda att följden konvergerar utan urval. Låt $Tx_k \to y \in \overline{W_T}$. Då får vi

$$|\langle x_k, T^*\eta_{n_k} - T^*\eta_{m_k}\rangle_1| \leq |\langle Tx_k - y, \eta_{n_k} - \eta_{m_k}\rangle_2| + |\langle y, \eta_{n_k} - \eta_{m_k}\rangle_2| \to 0 \text{ då } k \to \infty.$$

Detta ger en motsägelse som bevisar att $T^*\eta_n$ konvergerar.

Vi kan nu ge ett nytt bevis för sats 2.4.10. Av Lemma 2.4.11 följer nämligen att kärnan för $T+\lambda K$ har ändlig dimension och att värdeförrådet är slutet. Men ortogonalrummet till värdeförrådet är kärnan för $T^*+\lambda K^*$ och har ändlig dimension enligt lemma2.4.11 eftersom T^* har ändligt index (sats 2.5.8) och K^* är fullständigt kontinuerlig (sats 2.5.9). Alltså har $T+\lambda K$ ändligt index, och sats 2.4.10 följer då genast av sats 2.4.3.

2.6. <u>Hilbertrum.</u> Vi skall bara ge några enkla satser som har anknytning till den teori som vi genomfört för Banachrum och hänvisar till en lärobok om Hilbertrum för mera specifika resultat, t.ex. spektralsatsen för självadjungerade lineära transformationer. (Se t.ex. Gårding, Kvantmekanikens matematiska bakgrund.)

<u>Definition 2.6.1.</u> Ett Banachrum H över $\mathbb{C}$ kallas ett Hilbertrum om det existerar en funktion (x, y) från $H \times H$ till komplexa talen med egenskaperna

(2.6.1) $\quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \; ; \; x_1, x_2, y \in H,$

(2.6.2) $\quad (ax, y) = a(x,y); \; x, y \in H, \; a \in \mathbb{C},$

(2.6.3) $\quad (x,y) = \overline{(y, x)},$

så att $(x, x) = \|x\|^2$.

<u>Övning.</u> Visa att om (x, y) uppfyller (2,6,1) -(2,6,3) och $(x, x) \geq 0$ för varje x så är $(x,x)^{1/2}$ en seminorm.

På grund av övningen kan man också definiera ett Hilbertrum som ett vektorrum i vilket finns definierad en form (x, y) med egenskaperna (2.6.1)-(2.6.3) (man kallar detta för en sesquilineär form) så att $(x,x)>0$ då $x \neq 0$ och rummet är fullständigt med normen $(x,x)^{1/2}$.

På vanligt sätt visar man Cauchy-Schwarz' olikhet

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Den lineära formen $x \to (x, y)$ har därför normen $\|y\|$. Vi skall bevisa

<u>Sats 2.6.2.</u> Varje kontinuerlig lineärform på H kan på ett (och endast ett sätt) skrivas i formen

$$x \to (x,y)$$

där $y \in H$. Den lineära formens norm är $\|y\|$.

Det gäller tydligen bara att bevisa existensen av ett sådant y. Detta kommer att följa av ett allmännare resultat om topologiskt supplement till ett underrum som vi nu skall bevisa.

Låt G vara ett slutet underrum av H och sätt

$$G^{\perp} = \{x;\ x \in H,\ (x, y) = 0 \text{ för alla } y \in G\}.$$

Då är $G^{\perp}$ uppenbart ett slutet underrum och $G \cap G^{\perp} = \{0\}$. Vi skall bevisa

<u>Sats 2.6.3.</u> Varje element $x \in H$ kan på ett och endast ett sätt skrivas $x = y + z$ med $y \in G$ och $z \in G^{\perp}$. Man har $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, varför H är direkt topologisk summa av G och $G^{\perp}$. Man kallar $G^{\perp}$ för ortogonala komplementet till G i H.

<u>Lemma 2.6.4.</u> Låt $x \in H$ och sätt $d = \inf_{y \in G} \|x-y\|$. Då existerar ett $y \in G$ så att $d = \|x-y\|$.

<u>Bevis.</u> Tag en svit $y_n \in G$ så att $\|x-y_n\| \to d$. Det räcker att bevisa att

följden måste konvergera. Om $z_n = x-y_n$ har vi (enligt diagonalsatsen!)

$$\|z_n-z_m\|^2+\|z_n+z_m\|^2 = 2(\|z_n\|^2+\|z_m\|^2),$$

vilket också kan skrivas

$$\|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2+2\|x-y_m\|^2 - 4\|(x-(y_n+y_m)/2\|^2 \leqq$$
$$\leqq 2\|x-y_n\|^2+2\|x-y_m\|^2-4d^2 \longrightarrow 0.$$

(Här har vi använt att $(y_n+y_m)/2 \in G$, alltså bara konvexiteten av G.)

Detta bevisar lemmat.

Bevis för sats 2.6.3. Om $x = y+z$ med $y \in G$ och $z \in G^{\perp}$ så får vi

$$(x, x) = ((y+z),(y+z)) = (y,y) + (z,z)$$

eftersom $(y, z) = (z, y) = 0$. Det enda som återstår att bevisa är därför att varje $x \in H$ kan skrivas i denna form. Välj därför y enligt lemmat. För varje $\eta \in G$ är då, om vi sätter $z = x-y$

$$d^2 = \|z\|^2 \leqq \|z-\eta\|^2 = (z, z) - 2 \operatorname{Re} (z,\eta) + (\eta,\eta)$$

alltså

$$2 \operatorname{Re} (z, \eta) \leqq (\eta,\eta).$$

Om vi ersätter η med $t\eta$ där t är ett godtyckligt komplext tal så skall detta fortfarande gälla, vilket ger att $(z, \eta) = 0$, alltså $z \in G^{\perp}$.

Bevis för sats 2.6.2. Låt L vara en kontinuerlig lineärform på H. Sätt $G = \{x;\ x \in H,\ L(x) = 0\}$. Detta är ett slutet underrum av codimensionen 1 (utom i det triviala fallet då $L = 0$.) Det ortogonala komplementet är då ett underrum av dimensionen 1. Tag $y \neq 0$ i komplementet. Då har den lineära formen L och formen $x \longrightarrow (x, y)$ samma nollställen, nämligen G, vilket medför att $L(x) = a(x, y) = (x, \bar{a}y)$ för lämpligt komplext a. Satsen är bevisad.

Dualrummet H^* till H kan alltså identifieras med H; identifieringsavbildningen är isometrisk och antilineär (dvs. skalärer konjugeras).

Det är klart att ovanstående resultat gäller också för Hilbertrum över $\mathbf{R}$.

K a p i t e l III

Lokalt konvexa topologiska vektorrum

3.1. Definitioner och huvudsatser. Antag att vi har en familj av seminormer p_α i ett vektorrum E, där α genomlöper en viss indexmängd A. Man kan då definiera en topologi i E på följande sätt: En mängd O kallas en omgivning till x om det existerar ett ändligt antal seminormer p_{α_j}, $j = 1, \ldots, J$ och ett $\varepsilon > 0$ så att

$$p_{\alpha_j}(y-x) < \varepsilon \text{ för } j = 1, \ldots, J \Longrightarrow y \in O.$$

En mängd kallas öppen om den är en omgivning till var och en av sina punkter. Det inses genast att axiomen för ett topologiskt rum är uppfyllda; topologin blir separerad om och endast om till varje $x \neq 0$ existerar något $\alpha \in A$ så att $p_\alpha(x) \neq 0$.

I denna topologi betyder $\lim x_n = x$ att $p_\alpha(x_n - x) \to 0$ då $n \to \infty$ för varje $\alpha \in A$. Det slutna höljet $\overline{M}$ till en delmängd M av E är mängden av alla $x \in E$ sådana att varje omgivning till x skär M. Observera att eftersom omgivningarna till en punkt inte behöver ha uppräknelig bas behöver det inte existera någon följd av element i M som konvergerar mot x.

Samma topologi kan givetvis också definieras med andra system av seminormer q_β.

<u>Övning.</u> Visa att seminormerna p_α definierar en starkare topologi än seminormerna q_β om och endast om varje q_β kan uppskattas med summan av ändligt många p_α.

Det är klart att omgivningarna till x som definieras av

$$\{ y;\ p_{\alpha_j}(y-x) < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, J \}$$

alla är konvexa. Detta motiverar följande definition:

<u>Definition 3.1.1.</u> Ett vektorrum E med en topologi definierad av en familj av seminormer kallas ett lokalt konvext vektorrum.

Eftersom varje seminorm p uppfyller olikheten

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$$

så är p kontinuerlig om och endast om det går att finna C och $\alpha_1, \ldots, \alpha_J$ så att

$$p(x) \leq C \sum_1^J p_{\alpha_j}(x),\ x \in E.$$

Härav och av övningen ovan inses att topologin $\mathcal{T}$ som definieras av seminormerna p_α är identisk med den topologi som definieras av alla seminormer som är kontinuerliga i topologin $\mathcal{T}$.

<u>Exempel.</u> De kontinuerliga funktionerna på $(-\infty, +\infty)$ bildar ett lokalt konvext rum med seminormerna $p_n(f) = \sup_{|x| \leq n} |f(x)|$, $n = 1, 2, \ldots$ Motsvarande topologi är topologin av likformig konvergens på varje kompakt mängd. Denna topologi kan inte definieras med en enda norm $\|f\|$. För då skulle det finnas konstanter C_n så att $p_n(f) \leq C_n \|f\|$, alltså speciellt $|f(n)/C_n| \leq \|f\| < \infty$ för alla n och detta kan inte gälla för alla kontinuerliga funktioner f. Klassen av normerade rum är alltså för restriktiv för att täcka detta enkla exempel.

Om vi har två lokalt konvexa rum E och F med topologier definierade respektive av seminormerna p_α och q_β så innebär definitionerna att en lineär avbildning T av E in i F är kontinuerlig om och endast om till varje β går att finna ändligt många seminormer $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_k}$ och en konstant C så att

$$q_\beta(Tx) \leq C \sum_1^k p_{\alpha_j}(x), \quad x \in E.$$

Om F är ett underrum av det lokalt konvexa rummet E så definierar inskränkningen av seminormerna p_α till F en lokalt konvex topologi i F också. Vi har nu omedelbart olika varianter av Hahn-Banachs sats:

<u>Sats 3.1.2.</u> Om F är ett lineärt underrum av E så består $\overline{F}$ av alla $x \in E$ sådana att $f(x) = 0$ för alla kontinuerliga lineärformer f som försvinner på F.

<u>Sats 3.1.3.</u> Låt F vara ett underrum av E och f en kontinuerlig lineärform definierad i F. Då existerar en kontinuerlig lineärform f_1 på E som sammanfaller med f på F.

<u>Bevis för sats 3.1.2.</u> Det gäller att visa att om $x \notin \overline{F}$ så finns en kontinuerlig lineärform på E som försvinner på F men inte i x. Att $x \notin \overline{F}$ betyder att vi kan finna en seminorm p som är summan av ändligt många p_α och ett $\varepsilon > 0$ så att $p(y-x) < \varepsilon$ medför att $y \notin F$. Av sats 2.2.3 följer då att vi kan finna f kontinuerlig i den topologi som definieras av den enda seminormen p så att f försvinner på F men inte i x. Detta bevisar satsen.

Beviset för sats 3.1.3 är lika trivialt och kan utelämnas.

De satser i paragraf 2.3 som berodde på Baires sats går inte att överföra till allmänna lokalt konvexa rum. Vi inskränker oss vid studiet av dessa resultat till metriserbara rum.

Definition 3.1.4. Med en (translationsinvariant) metrik d i ett vektorrum menas en reellvärd funktion med följande egenskaper:

(3.1.1) $$d(x+y) \leqq d(x) + d(y)$$

(3.1.2) $$d(x) = d(-x)$$

(3.1.3) $$d(x) \geqq 0 \text{ och } d(x) = 0 \text{ endast då } x = 0.$$

Med avståndet mellan x och y menar man $d(x-y)$. Enligt (3.1.2) beror detta symmetriskt på x och y och enligt (3.1.1) gäller triangelolikheten. (Observera däremot att villkoret (2.1.2) i definitionen av en norm har uppgivits.) En metrik definierar en topologi på vanligt sätt: O kallas en omgivning till x om det finns ett $\varepsilon > 0$ så att $d(y-x) < \varepsilon$ medför $y \in O$.

Sats 3.1.5. Ett lokalt konvext rum är metriserbart om och endast om topologin kan definieras med ett uppräkneligt antal seminormer och är separerad.

Bevis. a) Nödvändigheten. Att topologin måste vara separerad är klart på grund av kravet (3.1.3) på en metrik. Varje omgivning till origo innehåller en av omgivningarna $V_n = \{x;\ x \in E,\ d(x) < 1/n\}$. Om topologin i E kan definieras av seminormerna p_α så kan vi till varje n finna en positiv lineärkombination $p^{(n)}$ av ändligt många p_α så att

$$p^{(n)}(x) < 1 \Rightarrow x \in V_n.$$

Varje omgivning till origo innehåller alltså en omgivning av formen $\{x;\ p^{(n)}(x) < 1\}$, seminormerna $p^{(n)}$ definierar därför topologin.

b) Tillräckligheten. Låt p_n vara seminormer i E, $n = 1, 2, \ldots$ och antag att $p_n(x) = 0$ för alla n medför att $x = 0$. Sätt

$$d(x) = \sum_1^\infty 2^{-n}\, p_n(x)/(1+p_n(x)).$$

Då är $0 \leq d(x) \leq 1$ och $d(x) = 0$ endast för $x = 0$. Nu är funktionen

$$f(t) = t/(1+t) = 1 - 1/(1+t)$$

för $t > 0$ en växande funktion och $f(t)/t$ avtar. Alltså har vi då $s,t \geq 0$

$$f(s)/s \geq f(s+t)/(s+t) \qquad , \; f(t)/t \geq f(s+t)/(s+t)$$

vilket ger $f(s+t) \leq f(s)+f(t)$ eftersom $f(0) = 0$. Alltså får vi att $d(ax) \leq d(x)$ då $|a| \leq 1$ med likhet då $|a| = 1$, och att d uppfyller (3.1.1). Det återstår bara att visa att d definierar samma topologi som seminormerna. Detta följer av att

$$d(x) < \varepsilon 2^{-N} \Longrightarrow p_n(x) < \varepsilon/(1-\varepsilon), \; n \leq N,$$

$$p_n(x) < \varepsilon/2 \text{ för } n \leq N \text{ där } 2^{-N} < \varepsilon/2 \Longrightarrow d(x) < \varepsilon.$$

Detta bevisar satsen.

<u>Definition 3.1.6.</u> Ett metriserbart rum E kallas fullständigt om för varje följd $x_n \in E$ med $x_n - x_m \to 0$ då n och $m \to \infty$ existerar ett $x \in E$ så att $x_n - x \to 0$. Ett lokalt konvext, metriserbart och fullständigt vektorrum kallas ett Fréchetrum.

I ett Fréchetrum gäller Baires sats med samma bevis som tidigare:

<u>Sats 3.1.7.</u> (Baires sats) Låt E vara ett Fréchetrum och F_n slutna delmängder av E som alla saknar inre punkter. Då har $\bigcup_1^\infty F_n$ inte heller någon inre punkt.

Som förut kan man därför definiera begreppen mängd av första och andra kategorin i Fréchetrum.

<u>Exempel.</u> Det existerar en analytisk funktion i enhetscirkeln vars derivator alla är kontinuerliga i den slutna cirkeln men som har denna som naturlig gräns. (Jämför exempel 2 sid 27.)

<u>Bevis.</u> Låt F vara rummet av alla analytiska funktioner i enhetscirkeln vars derivator är kontinuerliga i den slutna cirkeln och med seminormerna $p_\alpha(f) = \sup |D^\alpha f|$ (där D^α betecknar en godtycklig partiell derivata). Man inser genast att F är fullständigt, alltså ett Fréchetrum. Beviset blir i fortsättningen en upprepning av beviset för exempel 2 sid 27 och lämnas åt läsaren.

Exakt som i paragraf 2.3 följer nu att Banachs sats och satsen om den slutna grafen gäller i Fréchetrum. Vi upprepar inte formuleringarna. Däremot skall vi diskutera Banach-Steinhaus' sats närmare.

<u>Definition 3.1.8.</u> En mängd A i det lokalt konvexa rummet E kallas begränsad om till varje omgivning V av 0 i E existerar ett tal $a > 0$ så att $A \subset aV$.

Om man för V tar den omgivning som definieras av olikheten $p_\alpha(x) < 1$ så får man att $p_\alpha(x) < a$ då $x \in A$. Härav inses genast följande sats:

<u>Sats 3.1.9.</u> A är begränsad om och endast om $p_\alpha(x)$ är begränsad då $x \in A$ för varje fixt α.

I ett Banachrum betyder alltså definition 3.1.8 att en mängd är begränsad om elementens normer bildar en begränsad mängd.

<u>Definition 3.1.10.</u> Låt E och F vara lokalt konvexa rum. En delmängd H av rummet L(E, F) av kontinuerliga lineära avbildningar av E in i F kallas ekvikontinuerlig om till varje omgivning V av 0 i F existerar en omgivning U av 0 i E så att $u(x) \in V$ om $u \in H$ och $x \in U$.

Speciellt medför detta att för varje fixt $x \in E$ är $\{u(x);\ u \in H\}$ en begränsad delmängd av F. Omvänt gäller

Sats 3.1.11 (Banach-Steinhaus) Låt E vara ett Fréchetrum och F ett lokalt konvext rum. Om H är en delmängd av L(E, F) sådan att $\{u(x);\ x \in H\}$ är begränsad för varje fixt $x \in E$ så är H ekvikontinuerlig.

Bevis. Låt V vara en omgivning av 0 i F; vi kan anta att V är konvex, sluten och symmetrisk. Låt $T = \{x;\ x \in E,\ u(x) \in V$ för alla $u \in H\}$. Då är T konvex, sluten och symmetrisk. För varje $x \in E$ gäller vidare att $x \in nT$ för något heltal n, eftersom bilderna av x bildar en begränsad mängd. Alltså har vi

$$\bigcup_{1}^{\infty} nT = E.$$

Enligt Baires sats har då nT en inre punkt för något n, vilket medför att T har en inre punkt. Eftersom T är konvex och symmetrisk måste 0 vara en inre punkt (se t.ex. beviset för Banachs sats). Alltså är T en omgivning till origo, vilket visar att H är en ekvikontinuerlig mängd.

Det var endast i sista delen av beviset som det användes att E var ett Fréchetrum. Satsen gäller därför även om E bara är ett "tunnrum" i mening av följande definition:

Definition 3.1.12. En konvex, symmetrisk, sluten mängd T i ett lokalt konvext rum E kallas för en tunna om för varje $x (\in E)$ finns ett $\varepsilon > 0$ så att $\varepsilon x \in T$. Man kallar E för ett tunnrum om varje tunna är en omgivning till origo.

Varje Fréchetrum är alltså ett tunnrum och sats 3.1.11 gäller också om E bara är ett tunnrum.

Corollarium 3.1.13. Om E är ett tunnrum och F ett lokalt konvext rum, och om $u_n \in L(E,F)$ är punktvis konvergent, $u_n(x) \to u(x)$ för varje $x \in E$, så tillhör gränsvärdet u också L(E, F).

Vissa av de viktigaste rummen i distributionsteorin är tunnrum men inte Fréchetrum, varför den allmännare formen av Banach-Steinhaus sats där har ett visst intresse även om man i praktiken lätt reducerar sig på fallet av Fréchetrum.

3.2. Svaga topologier. Vi har nu en terminologi som lämpar sig för ett noggrannare studium av dualitet. Bortsett från de grundläggande definitionerna inskränker vi oss huvudsakligen till att betrakta Banachrum.

Definition 3.2.1. Låt F och G vara två vektorrum och $\langle x, y\rangle$ en bilineär form på $F \times G$, dvs. en komplexvärd funktion som är lineär i x (resp. y) för fixt y (resp. x). Man säger att formen sätter F och G i dualitet om

(3.2.1) $\langle x, y\rangle = 0$ för alla $y \in G$ medför $x = 0$,

(3.2.2) $\langle x, y\rangle = 0$ för alla $x \in F$ medför $y = 0$.

Exempel. Om E är ett lokalt konvext separerat rum och E^* rummet av de kontinuerliga lineärformerna på E så är E och E^* i dualitet, eftersom Hahn-Banachs sats medför (3.2.1).

Med hjälp av dualiteten kan man införa en lokalt konvex separerad topologi i F och i G:

Definition.3.2.2. Om F och G är i dualitet med bilineärformen $\langle x, y\rangle$ så kallar man den lokalt konvexa topologi i F som definieras av seminormerna

$$F \ni x \longrightarrow |\langle x, y\rangle|$$

med $y \in G$ för den svaga topologin i F och betecknar den med $\sigma(F, G)$.

Definitionen medför att lineärformerna $x \rightarrow \langle x, y\rangle$ blir kontinuerliga i den svaga topologin. Å andra sidan gäller

Sats 3.2.3. Varje lineärform på F som är kontinuerlig för $\sigma(F, G)$ kan för ett och endast ett $y \in G$ skrivas i formen

$$x \to \langle x, y \rangle.$$

Man kan alltså identifiera G med dualrummet till F med avseende på den svaga topologin; analogt är F dualrummet till G med avseende på $\sigma(G, F)$.

Bevis för satsen. Låt L vara en lineärform på F som är kontinuerlig i den svaga topologin. Då existerar ändligt många $y_i \in G$ och en konstant C så att

$$|L(x)| \leq C \sum_1^n |\langle x, y_i \rangle|, \quad x \in F.$$

Alltså är $L(x) = 0$ om x tillhör det rum av ändlig codimension som definieras av ekvationerna $\langle x, y_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Betecknar vi detta rum med N så är F/N ändligdimensionellt och lineärformerna $\langle x, y_i \rangle$ inducerar lineärformer i F/N med origo som enda gemensamt nollställe. Den lineärform i F/N som induceras av L är därför en lineärkombination av dessa, vilket bevisar satsen.

Vi skall nu speciellt intressera oss för dualiteten mellan ett Banachrum B och dess dualrum B^*.

Sats 3.2.4. Om ξ_n är en följd i B^* sådan att $\xi_n - \xi_m \to 0$ i $\sigma(B^*, B)$ då $n \to \infty$ och $m \to \infty$ så existerar $\xi \in B^*$ så att $\xi_n \to \xi$ då $n \to \infty$ i $\sigma(B^*, B)$.

Bevis. Enligt förutsättningen går $\langle x, \xi_n \rangle - \langle x, \xi_m \rangle$ mot 0 då $n, m \to \infty$ för varje fixt $x \in B$. Enligt Cauchys konvergensprincip existerar därför gränsvärdet $L(x) = \lim_{n \to \infty} \langle x, \xi_n \rangle$ och enligt Corollarium 3.1.13 är L en kontinuerlig lineärform. Detta bevisar satsen.

Betydligt svårare är följande sats (Tychonov).

<u>Sats 3.2.5.</u> Om B är ett Banachrum så är enhetsklotet i B^*, alltså $\{\xi;\ \xi \in B^*,\ \|\xi\| \leq 1\}$, kompakt för den svaga topologin $\sigma(B^*, B)$.

<u>Bevis.</u> Om man inte har några inskränkande förutsättningar på B så kräver beviset filterbegreppet eller något ekvivalent. Vi skall använda detta implicit och börjar med att erinra om vad som menas med kompakthet.

Ett topologiskt rum kallas kompakt om ur <u>varje</u> öppen övertäckning O_α (dvs. familj av öppna mängder O_α med $\bigcup O_\alpha$ lika med hela rummet) går att välja en ändlig övertäckning. Genom att övergå till komplementärmängder inser man att detta är ekvivalent med att om F_α är slutna delmängder och $\bigcap F_\alpha = \emptyset$ (tomma mängden) så finns ändligt många F_α med tomt genomsnitt. Genom negation får vi slutligen följande i beviset praktiska definition:

Ett topologiskt rum kallas kompakt om för varje system $\mathcal{F}$ av <u>slutna</u> delmängder F_α sådana att ändligt många F_α alltid har icke tomt genomsnitt gäller att $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$.

Låt nu $\mathcal{F}$ vara ett system av delmängder F_α av enhetssfären i B^* som är slutna för $\sigma(B^*, B)$, och antag att genomsnittet av ändligt många F_α aldrig är tomt. Med användning av Zorns lemma inser man genast att det existerar ett system $\mathcal{F}'$ av mängder med samma egenskaper så att $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ men inget system med de önskade egenskaperna omfattar $\mathcal{F}'$. Vi skall visa att $\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F$ består av en - och endast en - punkt.

Observera först att genomsnittet av ändligt många mängder ur $\mathcal{F}'$ också tillhör $\mathcal{F}'$ för annars kunde man utvidga $\mathcal{F}'$ genom att tillfoga ett sådant genomsnitt.

Låt nu x vara ett fixt element i B. Vi skall visa att det existerar ett och endast ett tal a sådant att skivan

$$\{\xi;\ \xi \in B^*,\ |\langle x,\ \xi\rangle - a| \leqq \varepsilon\}$$

råkar varje $F \in \mathcal{F}'$ för varje $\varepsilon > 0$. Beviset består av två delar:

1) Existensen av talet a. Om inget sådant tal a existerar kan vi enligt Borel-Lebesgues lemma övertäcka cirkeln $|z| \leqq \|x\|$ i komplexa talplanet med ändligt många cirklar $\{z;\ |z-a_j| \leqq \varepsilon_j\}$ så att till varje j finns ett $F_j \in \mathcal{F}'$ för vilket $|\langle x,\ \xi\rangle - a_j| > \varepsilon_j$ då $\xi \in F_j$. Om ξ tillhör $\bigcap F_j \in \mathcal{F}'$ så är därför $|\langle x,\ \xi\rangle| > \|x\|$ vilket strider mot antagandet att $\bigcap F_j$ inte är tom eftersom $\|\xi\| \leqq 1$. Alltså existerar ett a med den önskade egenskapen.

b) Entydigheten av ta let a. Om a har den önskade egenskapen så måste alla mängderna

$$\{\xi;\ \|\xi\| \leqq 1,\ |\langle x,\ \xi\rangle - a| \leqq \varepsilon\},\ \varepsilon > 0$$

tillhöra $\mathcal{F}'$, eftersom $\mathcal{F}'$ är maximal. Men två sådana mängder med olika a och tillräckligt små ε har ett tomt genomsnitt.

Vi skall nu visa att avbildningen $x \to a(x)$ är lineär. Vi observerar därför att skärningen av enhetsklotet med mängderna

$$\{\xi;\ |\langle x,\ \xi\rangle - a(x)| \leqq \varepsilon\} \text{ och } \{\xi;\ |\langle y,\ \xi\rangle - a(y)| \leqq \varepsilon\}$$

tillhör $\mathcal{F}'$ enligt b) ovan. I denna mängd är emellertid

$$|\langle \alpha x + \beta y,\ \xi\rangle - \alpha a(x) - \beta a(y)| \leqq \varepsilon(|\alpha| + |\beta|).$$

Alltså måste $a(\alpha x + \beta y) = \alpha a(x) + \beta a(y)$, vilket visar lineariteten. Då det är självklart att $|a(x)| \leqq \|x\|$ så är alltså a ett element av enhetsklotet i B^*. Vi betecknar det med ξ_0. Om $F \in \mathcal{F}'$ och x_j är ett ändligt antal element i B, $\varepsilon_j > 0$, så tillhör skärningen av F med skivorna

$$\{\xi;\ |\langle x_j, \xi\rangle - \langle x_j, \xi_0\rangle| \leq \varepsilon_j\}$$

också systemet $\mathcal{F}'$, är alltså inte tomt. Därför tillhör ξ_0 det slutna höljet av F och eftersom F är sluten måste $\xi_0 \in F$. Satsen är därmed bevisad.

Vi skall nu diskutera ett fall där beviset för sats 3.2.5 är mera elementärt.

Definition 3.2.6. B kallas separabelt om det finns en uppräknelig överallt tät delmängd av B.

Sats 3.2.7. Låt B vara separabelt och $x_1, x_2, \ldots$ en tät delmängd av B. Då definierar seminormerna

$$\xi \longrightarrow |\langle x_j, \xi\rangle|,\ j = 1, 2, \ldots \tag{3.2.3}$$

samma topologi som $\sigma(B^*, B)$ på enhetsklotet i B^*.

Bevis. Det räcker att bevisa att den topologi som definieras av $\sigma(B^*, B)$ är svagare än den som definieras av seminormerna (3.2.3) på enhetsklotet. Låt O vara en delmängd av enhetsklotet och ξ_0 en punkt i detta så att O är en omgivning till ξ_0 i topologin som induceras av $\sigma(B^*,B)$. Detta betyder att man kan finna $y_1, \ldots, y_N \in B$ och $\varepsilon > 0$ så att

$$\xi \in B^*,\ \|\xi\| \leq 1,\ |\langle y_k, \xi-\xi_0\rangle| < 2\varepsilon,\ k = 1, \ldots, N \Longrightarrow \xi \in O.$$

Välj nu för varje $k = 1, \ldots, N$ ett index j_k så att $\|y_k - x_{j_k}\| < \varepsilon/2$. Då är $|\langle y_k - x_{j_k}, \xi-\xi_0\rangle| < \varepsilon$ om $\|\xi\| \leq 1$, varför

$$\xi \in B^*,\ \|\xi\| \leq 1,\ |\langle x_{j_k}, \xi-\xi_0\rangle| < \varepsilon,\ k = 1, \ldots, N \Longrightarrow \xi \in O.$$

Detta bevisar satsen.

Kombination av satserna 3.2.5 och 3.2.7 ger

Sats 3.2.8. Enhetsklotet i dualrummet till ett separabelt Banachrum är ett kompakt metriserbart rum. i topologin $\sigma(B^*, B)$.

Kompaktheten kan emellertid här bevisas mera elementärt. På grund av metriserbarheten räcker det nämligen att visa att varje följd av element i enhetsklotet har en svagt konvergent delföljd, och en sådan kan man välja med Cantors diagonalförfarande. Vi lämnar som övning att utföra detta bevis.

Exempel. För L^p rummen med $1 < p \leq \infty$ och för rummet av alla mått med tillhörande svaga topologier följer viktiga urvalssatser i analysen av sats 3.2.8. Skriv upp dessa som övning.

Vi skall nu bevisa en viss omvändning till de föregående satserna. Vi behöver först en hjälpsats om vektorrum i dualitet.

Låt F och G vara två vektorrum i dualitet med bilineärformen $\langle x, y\rangle$. Låt $K \subset F$ vara konvex och roterad, dvs. antag att $ax \in K$ om $x \in K$ och $a \in \mathbb{C}$, $|a| \leq 1$. Sätt

$$K^o = \{y;\ y \in G,\ |\langle x, y\rangle| \leq 1,\ x \in K\}.$$

Man kallar K^o för polaren till K. Det är klart att K^o är konvex, roterad och sluten för $\sigma(G, F)$. Alltså är K^{oo} sluten för $\sigma(F, G)$ och innehåller K. Av Hahn-Banachs sats följer nu (jämför sats 2.5.7)

Sats 3.2.9. K^{oo} är det slutna höljet av K i topologin $\sigma(F, G)$.

Bevis. Antag att x_0 inte tillhör det slutna höljet av K. Enligt Hahn-Banachs sats (sats 2.2.2 som gäller oförändrad i ett lokalt konvext rum) finns en lineärform f på F som är kontinuerlig i $\sigma(F, G)$ så att

$$\inf_{x \in K} |f(x) - f(x_0)| = \varepsilon > 0.$$

Eftersom $x \in K$ medför $ax \in K$ då $|a| \leq 1$ måste $|f(x_0)| \geq |f(x)| + \varepsilon$ då $x \in K$. Genom multiplikation av f med lämplig konstant kan vi åstadkomma att

(3.2.4) $$\sup_{x \in K} |f(x')| = 1 < |f(x_0)|.$$

Nu kan vi på grund av den svaga kontinuiteten finna $y \in G$ så att $f(x) = \langle x, y\rangle$ för alla $x \in F$, och av (3.2.4) följer då att $y \in K^o$, alltså att $x_0 \notin K^{oo}$. Beviset är fullbordat.

Vi kan nu bevisa en omvändning till sats 3.2.5.

<u>Sats 3.2.10.</u> Låt F och G vara två Banachrum som är i dualitet med bilineärformen $\langle x, y\rangle$. Antag att

(3.2.5) $$\|x\| = \sup_{0 \neq y \in G} |\langle x, y\rangle|/\|y\|, \quad x \in F,$$

och att enhetsklotet i G är kompakt för $\sigma(G, F)$. Då kan varje kontinuerlig lineärform på F skrivas $x \to \langle x, y\rangle$ med lämpligt $y \in G$, och formens norm $= \|y\|$.

<u>Bevis.</u> Av (3.2.5) följer att lineärformen $x \to \langle x, y\rangle$ är kontinuerlig och att dess norm är högst $\|y\|$. Vi kan därför uppfatta G som ett underrum av F^*. Låt K vara enhetsklotet i G. Då är $K^o = \{x;\ x \in F,\ |\langle x,y\rangle| \leq 1$ för alla $y \in K\}$ enligt (3.2.5) lika med enhetsklotet i F. Om vi använder sats 3.2.9 på de två rummen F och F^* som är dualitet så följer att enhetsklotet i F^* är det slutna höljet i topologin $\sigma(F^*, F)$ av K. Men enligt förutsättning är K kompakt i den topologi som induceras på K av $\sigma(F^*, F)$, vilket medför att K är sluten. Alltså är K lika med enhetssfären i F^*, vilket bevisar att $G = F^*$ och att G och F^* har samma norm.

<u>Corollarium 3.2.11.</u> Ett Banachrum B är reflexivt om och endast om enhetsklotet i B är kompakt för $\sigma(B, B^*)$.

Vi skall till sist studera samband mellan svag och stark slutenhet och kontinuitet i B^*.

Sats 3.2.12. En lineärform på B^* vars restriktion till enhetsklotet i B^* är kontinuerlig för $\sigma(B^*, B)$ är kontinuerlig för $\sigma(B^*, B)$ i hela B^* (och alltså av formen $y \to \langle x, y\rangle$ för något $x \in B$).

Bevis. Eftersom enhetsklotet K^* i B^* är kompakt för $\sigma(B^*, B)$ är en sådan lineärform begränsad på K^*, alltså kontinuerlig för den starka topologin. Mängden av alla lineärformer på B^* som på K^* är kontinuerliga för $\sigma(B^*, B)$ är alltså ett underrum B_1 av B^{**},

$$B \subset B_1 \subset B^{**} ,$$

och B_1 är slutet eftersom likformiga gränsvärden av kontinuerliga funktioner är kontinuerliga. Nu ger $\sigma(B^*, B_1)$ samma topologi som $\sigma(B^*, B)$ på K^*. För den ger självklart en minst lika stark topologi, men som alla lineärformer $\langle \xi, y\rangle$ med $\xi \in B_1$ är kontinuerliga på K^* för $\sigma(B^*, B)$ kan den inte ge en strängt starkare topologi. Alltså är enligt sats 3.2.10 dualrummet till B_1 också lika med B^*. Vore nu $B \neq B_1$ så skulle enligt Hahn-Banachs sats finnas en kontinuerlig lineärform på B_1 som försvinner på B utan att vara identiskt noll, vilket är orimligt eftersom denna vore skalärprodukt med ett element i B^*. Alltså är $B = B_1$.

Allmännare skall vi visa

Sats 3.2.13. Ett lineärt underrum M av B^* är slutet för $\sigma(B^*, B)$ om genomsnittet med enhetsklotet är slutet.

Huvudsteget i beviset är följande lemma.

Lemma 3.2.14. Om förutsättningarna i sats 3.2.13 är uppfyllda och y_0 är ett fixt element $\notin M$, så existerar en följd av element $x_n \in B$ så att $x_n \to 0$ och av $|\langle x_n, y-y_0\rangle| \leq 1$ för alla n följer att $y \notin M$.

<u>Bevis.</u> Sätt $M_n = \{y;\ y \in M,\ \|y-y_0\| \leq n\}$. Antag att vi redan har visat att det finns ändligt många element $x_1, \ldots, x_k \in B$ så att

$$|\langle x_j,\ y-y_0\rangle| \leq 1,\ 1 \leq j \leq k \implies y \notin M_n.$$

Vi skall visa att det finns element $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m} \in B$ så att

$$|\langle x_j,\ y-y_0\rangle| \leq 1,\ 1 \leq j \leq k+m \implies y \notin M_{n+1},$$

och $\|x_{k+1}\| \leq 1/n, \ldots, \|x_{k+m}\| \leq 1/n$. Antag att detta vore fel. Eftersom M_{n+1} är kompakt för $\sigma(B^*, B)$ (då $M_{n+1}/(n+1) = M_1$ är en sluten delmängd av en kompakt mängd) skulle det då finnas ett $y \in M_{n+1}$ så att

(3.2.6) $\qquad |\langle x_j,\ y-y_0\rangle| \leq 1$ för $1 \leq j \leq k$,

(3.2.7) $\qquad |\langle x,\ y-y_0\rangle| \leq 1$ för alla $x \in B$ med $\|x\| \leq 1/n$.

Av (3.2.7) följer att $\|y-y_0\| \leq n$, alltså att $y \in M_n$, men av (3.2.6) följer enligt förutsättning att $y \notin M_n$. Denna motsägelse bevisar påståendet. Genom upprepad användning av konstruktionen erhålles en svit $x_1, x_2, \ldots$ med de önskade egenskaperna.

<u>Bevis för sats 3.2.13.</u> Sätt med följden x_n som ges av lemmat

$$p(y) = \sup_n |\langle x_n,\ y\rangle|.$$

Då är $p(y) \leq C\ \|y\|$ och p är alltså en seminorm i B. Av Lemma 3.2.14 följer att y_0 har avstånd till M som är ≥ 1 med avseende på p, alltså tillhör y_0 inte det slutna höljet av M i den topologi som definieras av p. Av Hahn-Banachs sats följer då att det existerar en lineärform L på B^* så att $L(y_0) = 1$, $L(y) = 0$ då $y \in M$ och $|L(y)| \leq p(y)$ för alla $y \in B^*$. Eftersom $x_n \to 0$ medför denna olikhet att restriktionen av L till enhetsklotet i B^* är kontinuerlig för $\sigma(B^*, B)$, varför L är kontinuerlig för $\sigma(B^*, B)$ enligt sats 3.2.12. Vi kan alltså finna $x \in B$ så att $L(y) = \langle x, y\rangle$, och då är $\langle x, y_0\rangle = 1$ medan $\langle x, y\rangle = 0$ om $y \in M$. Alltså är M svagt sluten.

Vi kan nu komplettera sats 2.5.8.

Sats 3.2.15. Låt $T \in L(B_1, B_2)$ och antag att W_{T^*} är slutet (i den starka topologin i B_1^* som definieras av normen). Då är W_T slutet, ortogonalrummet till K_T är W_{T^*} och ortogonalrummet till W_T är K_{T^*}.

Bevis. Som i beviset för sats 2.5.8 kan vi reducera oss till fallet då $K_T = \{0\}$ och W_T är tätt i B_2. Då är $K_{T^*} = \{0\}$, och vi skall visa att $W_{T^*} = B_1^*$ Observera först att eftersom W_{T^*} är slutet och $K_{T^*} = \{0\}$ så följer av Banachs sats att det finns en konstant C så att

$$\|\eta\|_2 \leq C \, \|T^*\eta\|_1 , \quad \eta \in B_2^* .$$

Låt K_1^* vara enhetsklotet i B_1^*. Då är

$$W_{T^*} \cap K_1^* = K_1^* \cap \{ T^*\eta ; \ \eta \in B_2 , \ \|\eta\| \leq C \} .$$

Den sista mängden är kompakt för $\sigma(B_1^*, B_1)$ eftersom den är en kontinuerlig bild av en mängd som är kompakt för $\sigma(B_2^*, B_2)$. (Den svaga kontinuiteten hos T^* följer av att $|\langle x, T^*\eta\rangle_1| < \varepsilon$ för alla η med $|\langle Tx, \eta\rangle_2| < \varepsilon$ vilket är en omgivning till origo i $\sigma(B_2^*, B_2)$.) Alltså är $W_{T^*} \cap K_1^*$ sluten för $\sigma(B_1^*, B_1)$, och av sats 3.2.13 följer nu att W_{T^*} är sluten för $\sigma(B_1^*, B_1)$. Om $x \in B_1$ är ortogonal mot W_{T^*} har vi $\langle x, T^*\eta\rangle_1 = \langle Tx, \eta\rangle_2 = 0$ för alla $\eta \in B_2$, alltså $Tx = 0$, vilket enligt antagandet ger $x = 0$. Enligt Hahn-Banachs sats är därför $W_{T^*} = B_1$.

Av uppskattningen

$$|\langle x, T^*\eta\rangle_1| = |\langle Tx, \eta\rangle_2| \leq \|Tx\|_2 \, \|\eta\|_2 \leq C \, \|Tx\|_2 \|T^*\eta\|_1$$

får vi eftersom $W_{T^*} = B_1^*$ att $\|x\|_1 \leq C\|Tx\|_2$, och eftersom W_T är tätt i B_2 följer härav att $W_T = B_2$. Beviset är fullbordat.

Till sist ger vi ett exempel på ett icke reflexivt rum. Vi vet redan att rummet $L^p(E)$ där E är en mätbar mängd i R^n med positivt mått är reflexivt om $1 < p < \infty$. Däremot är det inte reflexivt då $p = 1$. För dualrummet till $L^1(E)$ är $L^\infty(E)$ och vi kan konstruera en kontinuerlig lineärform på $L^\infty(E)$ på följande sätt. Låt x_0 vara en punkt i E sådan att ingen omgivning av x_0 skär E i en nollmängd och låt C vara den delmängd av $L^\infty(E)$ som bildas av restriktioner till E av kontinuerliga funktioner. Lineärformen

$$l(f) = f(x_0), \quad f \in C,$$

har då norm ≤ 1 och kan enligt Hahn-Banachs sats utvidgas till en kontinuerlig lineärform på L^∞. Eftersom vi kan finna en likformigt begränsad följd av funktioner $f_n \in C$ så att $f_n(x_0) = 1$ för varje n men $f_n(x) \to 0$ då $n \to \infty$ för varje $x \neq x_0$ följer genast av Lebesgues majorationssats att $l(f)$ inte kan skrivas i formen $\int f\, g\, dx$ med $g \in L^1(E)$. Detta bevisar att L^1 inte är reflexiv.