# Funktioner av flera variabler

Differential- och integralkalkyl för funktioner av flera variabler för kursen
Analys A 1 i matematik

Jan Boman

Matematiska institutionen

Augusti 2001

# Innehåll

## Förord till andra reviderade upplagan

Från och med HT 1973 ingår i kursen Analys A 1 i matematik ett mindre kvantum differential- och integralkyl för funktioner av flera variabler. Tiden medger ej att man inom kursen Analys A 1 behandlar detta ämne med den gängse grundligheten. I detta kompendium har jag försökt att nedskriva en starkt förkortad kurs i ämnet, för att densamma skall få plats inom kursen Analys A 1, och därtill ej blott i teorien (d.v.s. i studieplanen) utan även i praktiken (d.v.s. i form av faktiskt inhämtade kunskaper).

Kap. 1 och 2 är närmast avsedda som en repetition av de i detta sammanhang viktigaste begreppen ur den lineära algebran. Den läsare som ej redan behärskar någon räkning med vektorer finner möjligen dessa avsnitt något svårtillgängliga. De är ej heller oundgängligen nödvändiga för fortsättningen, utan kan i värsta fall överhoppas. Om man läser Algebra A 1 före Analys A 1, så är kap. 1 och 2 överflödiga.

I kap. 3 och 4 behandlas gränsvärden och kontinuitet respektive partiella derivator för funktioner av två variabler samt kedjeregeln i det enklaste fallet. Vektorspråk och vektorbeteckningar har undvikits. Begreppet differentierbarhet behandlas ej. Eftersom någon grundlig utredning av begreppen öppen och sluten mängd i $\mathbb{R}^2$ ej bedömts få plats inom kursen, har jag helt undvikit att använda dessa begrepp. Satserna om kontinuerliga funktioner på kompakta mängder har således ej heller behandlats.

Tangentplan och gradient behandlas kortfattat i kap. 5.

Extremproblem behandlas i kap. 6. Det visas hur man kan finna extrempunkterna, antingen på randen eller bland nollställena till partiella derivatorna. Existensen av extremum för en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$ utnyttjas ej, eftersom denna sats ej förutsätts känd. Taylors formel för flera variabler har ej medtagits, varför frågan om villkor på 2:a ordningens derivator för att en stationär punkt skall vara en lokal extrempunkt ej har studerats.

I avsnittet om dubbelintegraler (kap. 7) har definitionen av dubbelintegral blott antytts. Framställningen har baserats på begreppet upprepad integral och på det intuitiva begreppet volym. I avsnittet om variabelsubstitution i dubbelintegraler (kap. 8) behandlas blott affina och polära substitutioner, och detta utan bevis.

Stockholm i februari 1974
Jan Boman

## Förord till tredje upplagan

Denna upplaga av kompendiet är moderniserad i tekniskt avseende men i övrigt oförändrad, bortsett från att figurerna har förbättrats och utökats något. Jacob Kowalewski har gjort datorritade figurer med hjälp av programmen MATLAB® och Xfig, och skrivit texten, som är typsatt med LaTeX.

Avsnitten om gränsvärden och kontinuitet i kap. 3 förefaller idag överambitiösa, eftersom motsvarande begrepp för funktioner av en variabel numera berörs blott flyktigt inom grundkursen. Jag har dock valt att låta dessa avsnitt stå kvar, dels för att jag hoppas att en och annan läsare kan ha utbyte av dem, dels därför att det går bra att läsa kompendiet med överhoppning av dessa avsnitt.

Litteraturhänvisningarna är inaktuella, eftersom de citerade böckerna inte längre används som kursböcker. Eftersom kursböcker av någon anledning byts ofta har jag bedömt det som meningslöst att infoga hänvisningar till den för ögonblicket aktuella kurslitteraturen. Emellertid är vilka som helst elementära läroböcker i lineär algebra och en-variabelanalys användbara för ändamålet. Min avsikt med dessa hänvisningar är i första hand att hjälpa läsaren att se sambandet mellan olika delar av grundkursen – och kanske framför allt att känna igen *samma begrepp* när det dyker upp med eventuellt olika beteckningar i olika kursmoment. Vid de ställen i texten där jag hänvisar till andra läroböcker rekommenderar jag därför läsaren att själv – eller med lärarens hjälp – leta upp och begrunda motsvarande avsnitt i sina egna läroböcker.

Stockholm i september 2001
Jan Boman

# Kapitel 1

# Rummen $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Vi skall beteckna med $\mathbb{R}^2$ mängden av ordnade par $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ av reella tal $x_1$ och $x_2$. Man definierar addition av sådana par genom

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \tag{1.1}$$

och vidare multiplikation med reellt tal $t$ genom

$$t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2). \tag{1.2}$$

Då gäller följande räkneregler (vi skriver $\mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2)$ o.s.v.)

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} \tag{1.3a}$$

$$t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y} \tag{1.3b}$$

$$(s + t)\mathbf{x} = s\mathbf{x} + t\mathbf{x} \tag{1.3c}$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ och $s, t \in \mathbb{R}$.

**Övning 1.1.** Verifiera med hjälp av definitionerna (1.1) och (1.2) att formlerna (1.3a), (1.3b) och (1.3c) gäller.

I analogi med ovanstående betecknar man med $\mathbb{R}^3$ mängden av ordnade tripplar $(x_1, x_2, x_3)$ av reella tal. Man definierar addition genom

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

och multiplikation med skalär genom

$$t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, tx_3).$$

Även i detta fall gäller formlerna (1.3a), (1.3b) och (1.3c). Elementen i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kallas ofta för *vektorer*.

Man definierar en s.k. *skalärprodukt* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ mellan $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ genom

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Denna är lineär i vardera argumentet, d.v.s.

$$\mathbf{x}\cdot(s\mathbf{y}+t\mathbf{z}) = s(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+t(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) \tag{1.4a}$$

$$(s\mathbf{x}+t\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = s(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})+t(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) \tag{1.4b}$$

för alla $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2$ och $s,t\in\mathbb{R}$.

**Övning 1.2.** Bevisa formlerna (1.4a) och (1.4b).

Man definierar vidare *längden* $|\mathbf{x}|$ eller *normen* av vektorn $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ genom

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}. \tag{1.5}$$

Observera att $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ alltid är $\geq 0$. Normen har egenskaperna

$$|\mathbf{x}|\geq 0 \qquad \text{för alla } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \tag{1.6a}$$

$$|\mathbf{x}|=0 \qquad \text{om och endast om } \mathbf{x}=(0,0) \tag{1.6b}$$

$$|t\mathbf{x}|=|t||\mathbf{x}| \qquad \text{för alla } t\in\mathbb{R},\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{1.6c}$$

För $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ och $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ definierar man skalärprodukten $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ genom

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

och normen analogt med (1.5), d.v.s.

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}.$$

Man säger att $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är *ortogonala* mot varandra om $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.

**Övning 1.3.** Verifiera att skalärprodukten i $\mathbb{R}^3$ uppfyller (1.4a) och (1.4b) samt att normen uppfyller (1.6a), (1.6b) och (1.6c)

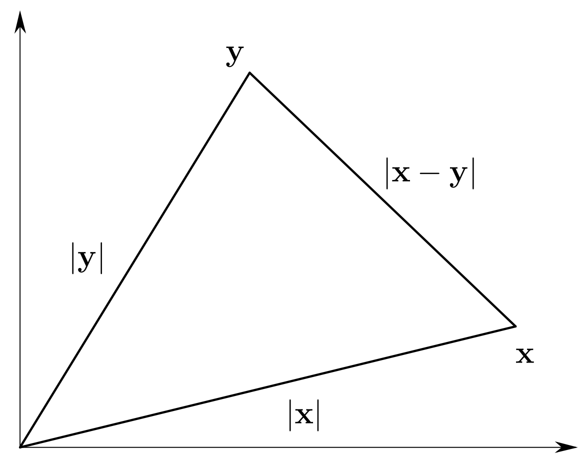
Om vektorerna i $\mathbb{R}^2$ representerar punkter i ett plan, så är $|\mathbf{x}|$ lika med *avståndet* från $\mathbf{0}=(0,0)$ till $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ (Pytagoras sats). Analogt är $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ avståndet från punkten $\mathbf{x}$ till punkten $\mathbf{y}$. Eftersom längden av en sida i en triangel är mindre än summan av längderna av de två övriga, så måste gälla

$$|\mathbf{x}|\leq|\mathbf{y}|+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Om vi ersätter $\mathbf{x}$ med $\mathbf{y}+\mathbf{z}$, så får vi olikheten på en mer symmetrisk form:

$$|\mathbf{y}+\mathbf{z}|\leq|\mathbf{y}|+|\mathbf{z}|. \tag{1.7}$$

Detta är *triangelolikheten* för vektorer i $\mathbb{R}^2$. Olikheten gäller också för vektorer i $\mathbb{R}^3$. Observera att argumentet ovan kan användas även i detta fall, eftersom punkterna $\mathbf{0}=(0,0,0)$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ och $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ utgör hörnen i en plan triangel i rymden med sidorna $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{y}|$ och $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$.




**Figur 1.** Illustration till triangelolikheten.

Observera att likhet gäller i (1.7) om $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ är parallella och riktade åt samma håll.

Om $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ är vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\alpha$ betecknar vinkeln mellan $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$, så gäller följande formel för skalärprodukten

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{y}||\mathbf{z}| \cos \alpha. \tag{1.8}$$

Denna formel bevisas ej här. (Ofta använder man formel (1.8) som *definition* av skalärprodukten.)

**Övning 1.4.**

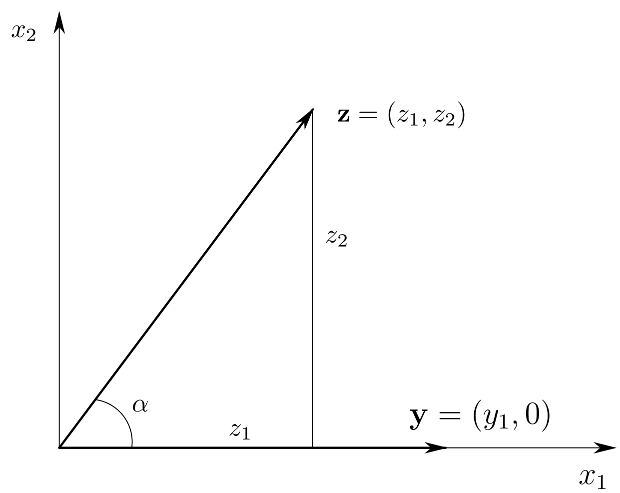
a) Visa formeln (1.8) i specialfallet att $\mathbf{y}$ är parallell med $x$-axeln, d.v.s. $\mathbf{y} = (y_1, 0)$ för något $y_1 > 0$ (se figur 2).

   **Ledning.** $\cos \alpha$ *kan ju beräknas ur figuren, nämligen* $\cos \alpha = z_1 \big/ \sqrt{{z_1}^2 + {z_2}^2}$.

b) Verifiera formeln (1.8) då $\mathbf{y} = (2, 2)$ och $\mathbf{z} = (-3, 0)$.

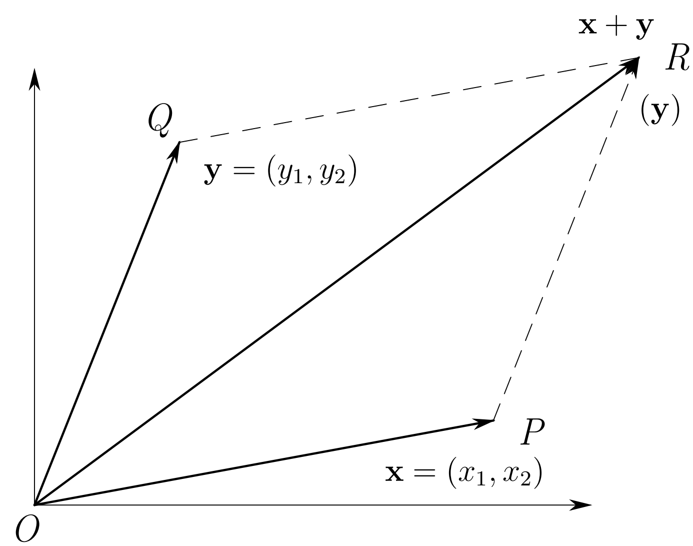
Formeln (1.8) visar att om $\mathbf{z}$ har längden 1, d.v.s. $|\mathbf{z}| = 1$, så är $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{y}| \cos \alpha$, d.v.s. $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ är längden av projektionen av $\mathbf{y}$ på linjen med riktningen $\mathbf{z}$, räknad positiv om projektionen får samma riktning som $\mathbf{z}$.

Det kan vara värt att notera att ett element $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ brukar användas för att representera två slag av geometriska storheter, nämligen dels en *punkt* i ett plan (nämligen punkten med koordinaterna $(x_1, x_2)$), dels en *förflyttning* eller *hastighet* eller liknande (inom fysiken en kraft eller en fältstyrka t.ex.). Särskilt i det senare fallet är det praktiskt att representera elementet $\mathbf{x}$ med en pil (se figur 3). En sådan pil behöver inte nödvändigtvis börja i origo. Två pilar som har samma längd och riktning representerar samma vektor, d.v.s. samma element i $\mathbb{R}^2$. Exempelvis representerar pilen $\overrightarrow{PR}$ i figur 3 samma vektor som $\overrightarrow{OQ}$, nämligen vektorn $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Detta sätt att representera vektorer är ju bl.a. praktiskt när man vill addera vektorer. Exempelvis är vektorn $\overrightarrow{OR}$ $(= \mathbf{x} + \mathbf{y})$ summan av $\overrightarrow{OP}$ $(= \mathbf{x})$




**Figur 2.** Illustration till Övning 1.4 a).

och $\overrightarrow{OQ}$ $(= \mathbf{y})$. Det är slutligen viktigt att observera att när en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ skall representera en *punkt* i planet så måste motsvarande pil placeras med sin början i origo; pilspetsen anger då punkten $\mathbf{x}$. Exempelvis representerar vektorn $\mathbf{y}$ punkten $Q$ i figur 3.




**Figur 3.** Addition av vektorer.

# Kapitel 2

# Ekvationer för linjer och plan

Som bekant utgör mängden av $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$2x_1 + 5x_2 - 10 = 0 \tag{2.1}$$

en rät linje i planet $\mathbb{R}^2$. Man säger ju att (2.1) är linjens ekvation. Vi skall nu skriva linjens ekvation i s.k. *parameterform*. Vi kallar linjen för $L$.

Om $(x_1, x_2)$ är en punkt på linjen $L$, och

$$x_1 = t \tag{2.2}$$

så är

$$x_2 = -\frac{2t}{5} + 2 \tag{2.3}$$

Man ser genast att då $t$ genomlöper alla reella tal så genomlöper $(x_1, x_2)$ linjen $L$, om $x_1$ och $x_2$ är bestämda genom (2.2) och (2.3). Ekvationerna (2.2) och (2.3) kan sammanfattas i vektorform:

$$(x_1, x_2) = (t, -\frac{2t}{5} + 2),$$

eller om vi använder (1.1) och (1.2):

$$(x_1, x_2) = t(1, -\tfrac{2}{5}) + (0, 2). \tag{2.4}$$

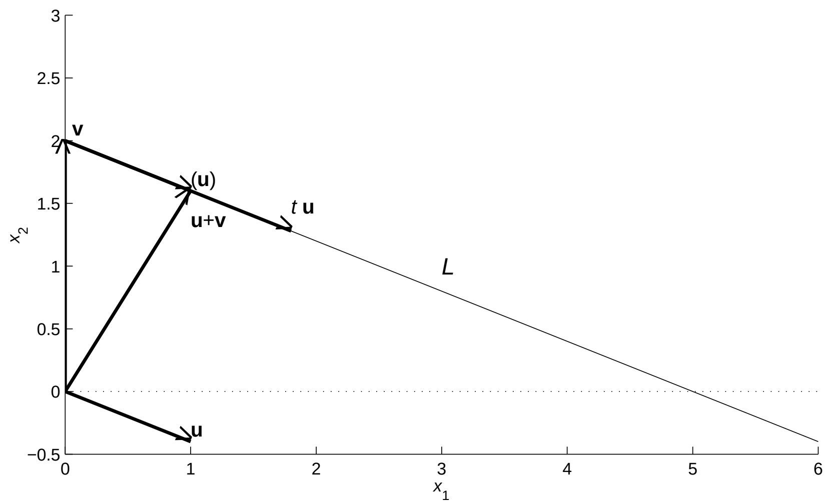
Ekvationen (2.4) kallas linjen $L$:s ekvation i parameterform.

Om $\mathbf{u}$ är $(1, -\frac{2}{5})$ och $\mathbf{v}$ är $(0, 2)$ så kan ekvationen ovan skrivas

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u} + \mathbf{v}. \tag{2.4$'$}$$

Observera noga innebörden av att (2.4) är ekvationen för linjen, nämligen följande: för varje reellt tal $t$ är $t\mathbf{u} + \mathbf{v}$ en punkt på linjen, och omvänt står varje punkt på linjen av denna form för något reellt tal $t$. (Övertyga Dig själv om att det sagda är riktigt.)

Speciellt måste således punkten $\mathbf{v}$ ligga på linjen $L$; och vidare, eftersom $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ligger på $L$ ($t = 0$ resp. $t = 1$), så måste $\mathbf{u}$ *vara parallell med* $L$. (Man säger att $\mathbf{u}$ är parallell med $L$ om linjen från $\mathbf{0} = (0, 0)$ till $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ är parallell med $L$. Observera att linjen från $\mathbf{0}$ till $\mathbf{u}$ är parallell med linjen från $\mathbf{v}$ till $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.)




**Figur 4.** Parameterrepresentation av rät linje.

**Övning 2.1.** För godtyckliga reella tal $a$, $b$ och $c$, där $a$ och $b$ ej bägge är noll är $ax_1 + bx_2 = c$ ekvationen för för en linje. Skriv linjens ekvation på parameterform.

Observera att en linje kan skrivas på parameterform på många olika sätt. Exempelvis får vi samma linje som ovan om vi tar

$$\begin{aligned} & \mathbf{u} = (1, -\tfrac{2}{5}) \text{ och } \mathbf{v} = (5, 0) \\ \text{eller} \quad & \mathbf{u} = (-5, 2) \text{ och } \mathbf{v} = (5, 0). \end{aligned}$$

(Verifiera detta!)

Ovanstående ger en metod att direkt skriva upp ekvationen för en linje som går genom en viss punkt $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ och är parallell med en viss vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Ekvationen (2.4′) löser problemet. Om man vill ha ekvationen på formen $ax_1 + bx_2 = c$ så behöver man ju blott eliminera $t$ mellan de två ekvationerna.

Skalärprodukten i $\mathbb{R}^2$ ger en möjlighet att tolka ekvationen $ax_1 + bx_2 = c$ geometriskt. Om vi nämligen låter $\mathbf{p}$ beteckna vektorn $(a, b)$, så kan ekvationen skrivas

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = c.$$

Linjen består alltså av alla $\mathbf{x}$ vilkas skalärprodukt med $\mathbf{p}$ har värdet $c$. Om $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ är två olika punkter på linjen, så måste gälla

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = c - c = 0.$$

Eftersom $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ är parallell med $L$, så visar detta att $\mathbf{p}$ är ortogonal mot linjen, d.v.s. en *normalvektor* till linjen. I vårt exempel är alltså $(2, 5)$ en normalvektor; detta stämmer med att $(1, -\frac{2}{5})$ är parallell med linjen, eftersom $(2, 5) \cdot (1, -\frac{2}{5}) = 0$

Vi förflyttar oss nu till $\mathbb{R}^3$. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är giva vektorer i $\mathbb{R}^3$, så betyder

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ekvationen (i parameterform) för en linje $L$ i $\mathbb{R}^3$ som går genom $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ och är parallell med $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Ty $\mathbf{v}$ ligger på $L$, och eftersom också $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ligger på $L$, så måste $\mathbf{u}$ vara parallell med $L$.

**Övning 2.2.** Bestäm ekvationen i parameterform för en linje i $\mathbb{R}^3$ som går genom $(1, 2, 3)$ och är parallell med $(-2, 1, 2)$.

Låt nu $\mathbf{p}$ vara en given vektor i $\mathbb{R}^3$ och $c$ ett givet reellt tal. Då betyder

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = c$$

ekvationen för ett *plan* $T$ i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonalt mot $\mathbf{p}$. Ty om $\mathbf{u}$ är en godtycklig vektor som är parallell med $T$ och $\mathbf{z}$ ligger på $T$, så ligger även $\mathbf{z} + \mathbf{u}$ på $T$ (varför?), och härav följer att

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{u}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} = c - c = 0,$$

d.v.s. $\mathbf{u}$ måste vara ortogonal mot $\mathbf{p}$.

Om vi tar $\mathbf{p} = (a_1, a_2, a_3)$, så ser vi att ekvationen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c \tag{2.5}$$

betyder ett plan som är ortogonalt mot vektorn $(a_1, a_2, a_3)$.

**Övning 2.3.** Bestäm ekvationen för ett plan i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonalt mot $(1, 2, -1)$ och som går genom punkten $(1, 0, 2)$.

**Övning 2.4.** Visa att avståndet från planet (2.5) till origo är

$$\frac{|c|}{|\mathbf{a}|} = \frac{c}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}},$$

exempelvis genom att visa att $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} c$, där $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, ligger på planet, och att samma vektor är ortogonal mot planet.

# Kapitel 3

# Gränsvärde och kontinuitet

Vi skall nu studera reellvärda funktioner av *två* reellvärda variabler $x$ och $y$. Detta är samma sak som att studera funktioner från $\mathbb{R}^2$, eller någon delmängd av $\mathbb{R}^2$, till $\mathbb{R}$.

Beteckna definitionsmängden för funktionen $f$ med $D_f$. Till varje element $(x, y) \in D_f$ är då tillordnat ett tal $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Vårt huvudmål är att använda differential- och integralkalkyl på funktioner av flera variabler. Differentialkalkyl behövs bl.a. för att studera maximum- och minimumproblem (kapitel 6). Integraler av funktioner av flera variabler behövs exempelvis inom fysiken för att beräkna volym, moment, tröghetsmoment, potential o.s.v. Liksom för funktioner av en variabel är begreppen derivata och integral för funktioner av flera variabler baserade på begreppet gränsvärde. Vi måste därför börja med att studera det sistnämnda begreppet.

För att göra läsaren en smula van att arbeta med funktioner av flera variabler vill vi först av allt ge några övningsuppgifter.

Ett sätt att grafiskt beskriva en funktion av två variabler $f(x, y)$ är att upprita funktionskurvorna $x \mapsto f(x, y) = z$ för några olika fixa $y$, eller motsvarande med $x$ och $y$ i ombytta roller.

**Exempel.** Betrakta funktionen $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Funktionskurvan $x \mapsto f(x, y) = z$ har i figur 5b ritats upp för några värden på $y$.

**Övning 3.1.** Skissera funktionskurvorna $x \mapsto f(x, y) = z$ för några $y$-värden som Du själv tycker är lämpliga då $f$ är funktionen

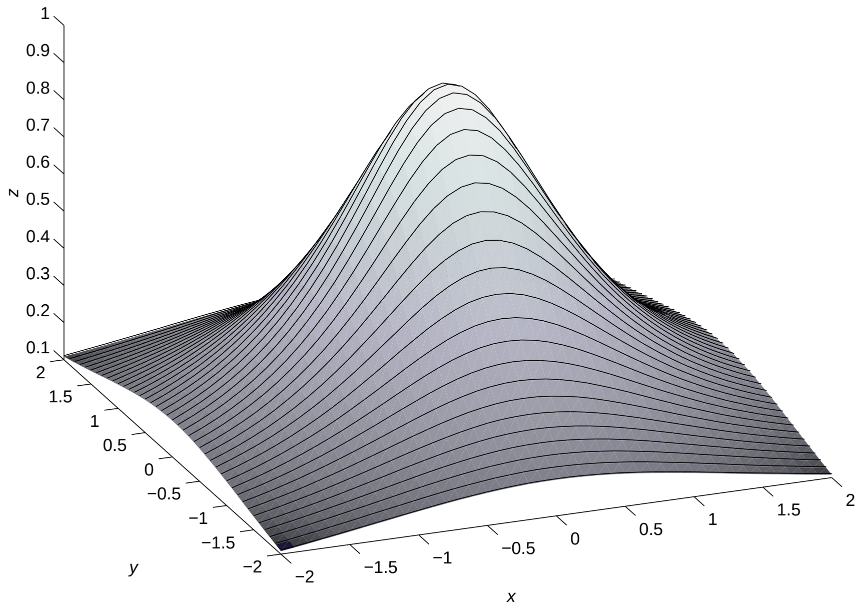
a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2x + 1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \neq (0, 0)$.

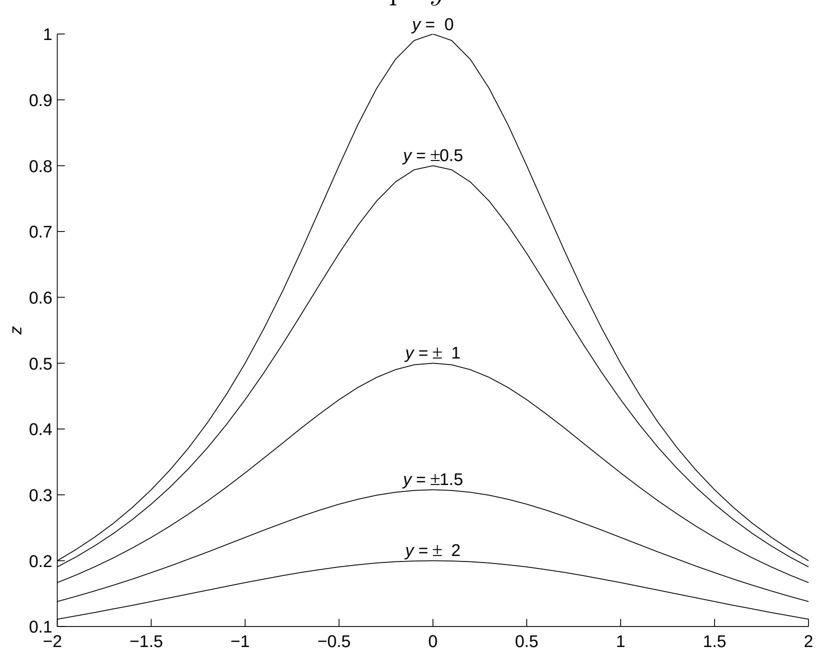
**Övning 3.2.** Skissera kurvorna $f(x, y) = c$ för några olika värden på $c$ för var om en av funktionerna

a) $f(x, y) = e^{x-2y},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

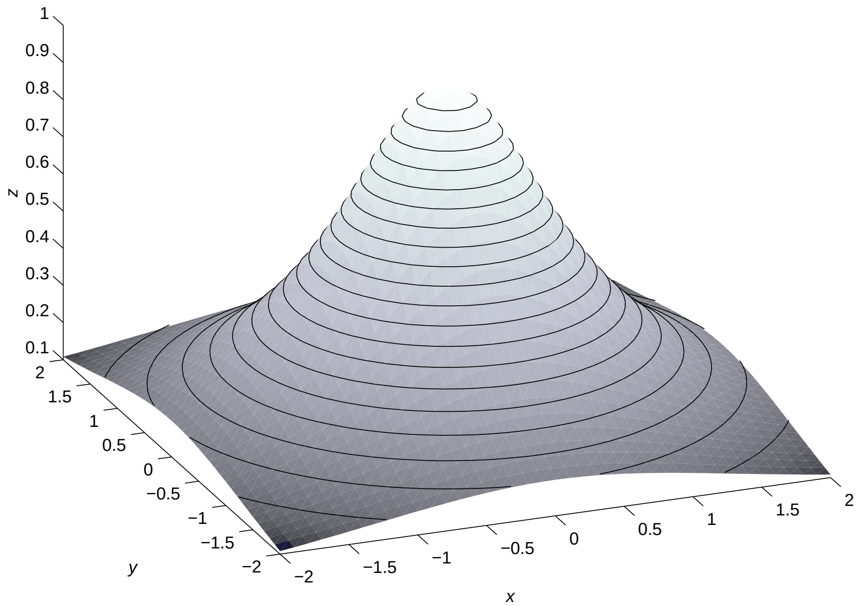
b) $f(x, y) = (x - y^2)^2 + 1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$



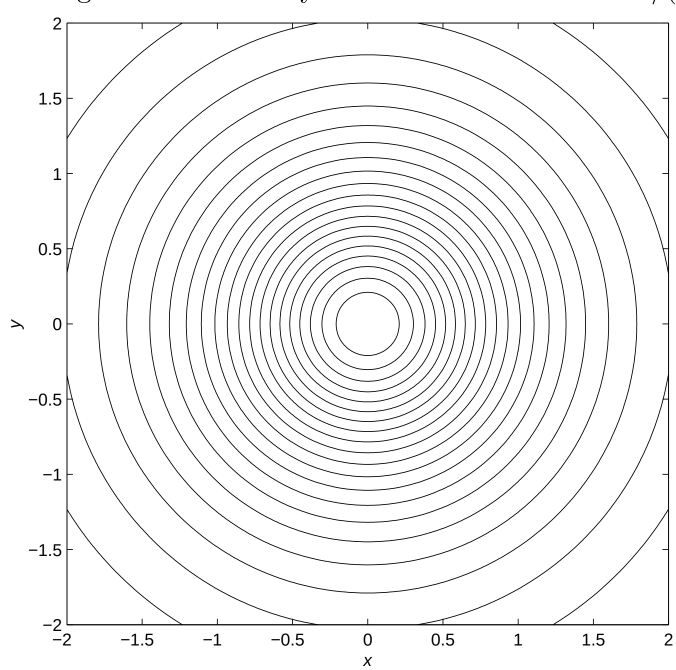

**Figur 5a.** Funktionsytan $z = 1/(x^2 + y^2 + 1)$ samt några kurvor i rymden för samma funktion och konstanta värden på $y$.




**Figur 5b.** Funktionen $x \mapsto 1/(x^2 + y^2 + 1) = z$ för några olika $y$-värden.




**Figur 5c.** Några nivåkurvor i rymden för funktionen $z = 1/(x^2 + y^2 + 1)$.




**Figur 5d.** Samma nivåkurvor som i Figur 5c, fast projicerade i $xy$-planet. Observera att kurvorna ligger tätare där funktionsytan är brant.

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

d) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$

e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2x + 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Man säger att funktionen $f(x, y)$ har ett maximum i punkten $(a, b)$ om $f(a, b) \geq f(x, y)$ för alla $(x, y) \in D_f$.

**Övning 3.3.**

a) Tycker du att de uppritade kurvorna ger anledning att förmoda att funktionen $\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ har någon maximipunkt, och i så fall i vilken punkt?

b) Analog fråga för minimipunkt och funktionen i Övning 2.1 a).

c) Analoga frågor för funktionerna i Övning 2.2 a), 2.2 b) och 2.2 d).

d) Kan du bevisa något av de resultat du funnit i a), b) eller c)?

(En allmän metod för att studera sådana här problem presenteras i kapitel 6.)

## 3.1 Gränsvärdesdefinitionen

Liksom i fallet en variabel måste betydelsen av uttrycket

$$f(x, y) \text{ har gränsvärdet } A \text{ då } (x, y) \text{ går mot } (a, b), \tag{3.1}$$

eller, vilket är samma sak,

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = A \tag{3.2}$$

exakt fastställas, innan man kan bevisa några satser om gränsvärden. Betydelsen fastställs i följande definition.

**Definition 1.** *Antag att $f(x, y)$ är en funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$. Uttrycken* (3.1) *och* (3.2) *betyder då följande:*

*För varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att*

$$\begin{aligned} |f(x, y) - A| < \varepsilon \quad &\text{för alla } (x, y) \text{ sådana att} \\ 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} &< \delta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

I en del textböcker skriver man i stället för (3.3)

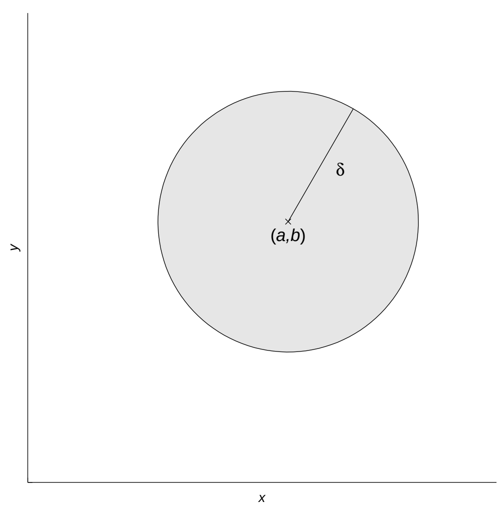
$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon. \tag{3.3'}$$

Men (3.3′) och (3.3) har exakt samma betydelse. (Ty om $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ är påståenden som innehåller variablerna $x$ och $y$, så betyder ju $P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)$ följande: för alla $x$ och $y$ sådana att $P(x,y)$ gäller, så gäller $Q(x,y)$.)

Det är viktigt att observera att Definition 1 är nästan densamma som definitionen av $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i fallet en variabel (se t.ex. [D] sid 104). Skillnaden är blott att vi i stället för $|x-a|$ skriver

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \tag{3.4}$$

förutom att vi givetvis skriver $(x,y)$ i stället för $x$ och $(a,b)$ i stället för $a$ överallt. Observera att uttrycket (3.4) är avståndet från punkten $(x,y)$ till punkten $(a,b)$ i $\mathbb{R}^2$ , liksom $|x-a|$ är avståndet från punkten $x$ till punkten $a$ på reella linjern $\mathbb{R}$ (se figur 6).



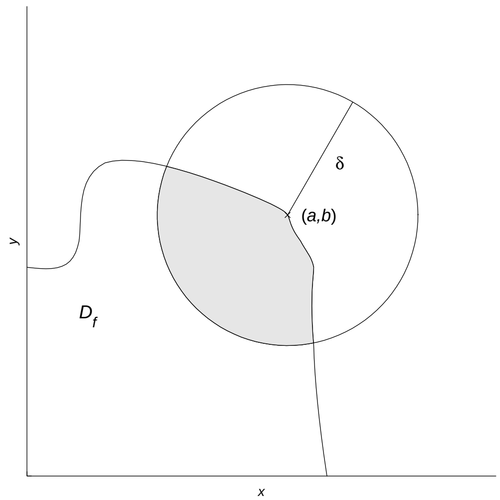

**Figur 6.** Mängden $\left\{(x,y);\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}$

För att illustrera villkoret i Definition 1 ger vi härnäst några exempel och övningar. Det bör observeras att de metoder som används i Exempel 3.1, Exempel 3.2 och Exempel 3.3 nedan ej är viktiga i och för sig; de skall strax ersättas av mer effektiva metoder att beräkna gränsvärden. Dessa exempel och övningar har lagts in endast för att hjälpa läsaren förstå innebörden av villkoret (3.3).

**Exempel 3.1.** Visa med hjälp av Definition 1 att funktionen $f(x,y) = 2x+y$ har gränsvärdet 0 då $(x,y) \to (0,0)$.

**Lösning.** Låt $\varepsilon$ vara ett godtycklig tal $> 0$. Genom att sätta in $a = b = A = 0$ i (3.3), så ser vi att det gäller att visa att det finns tal $\delta > 0$ så att

$$\begin{aligned} |2x+y| < \varepsilon \quad &\text{för alla } (x,y) \text{ sådana att} \\ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta & \end{aligned} \tag{3.5}$$




**Figur 7.** Mängden $D_f \cap \left\{(x,y); \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta\right\}$

Om vi använder olikheterna $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ och $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ (bevis: kvadrera!) samt triangelolikheten, så inser vi att

$$|2x+y| \leq 2|x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}.$$

Nu inses genast att (3.5) är sann för $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$. Ty om $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{3}\varepsilon$ så är $3\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$.

Ofta är det praktiskt att välja $\delta$ så att $\delta$ uppfyller både $\delta \leq$ konstant $\cdot\, \varepsilon$, t.ex $\delta \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ såsom i nästa exempel, och $\delta \leq 1$; dessa båda krav är ju uppfyllda exempelvis om man sätter $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{4}, 1)$. Observera att vi får välja $\delta$ som vi vill, eftersom det blott gäller att visa att *det finns ett* $\delta > 0$ så att (3.5) gäller.

**Exempel 3.2.** Visa med hjälp av Definition 1 att funktionen $f(x,y) = 3x^2+y$ har gränsvärdet 0 då $(x,y) \to (0,0)$.

**Lösning.** Låt $\varepsilon$ vara godtyckligt $> 0$. Det gäller att finna ett $\delta > 0$ så att

$$\begin{aligned} &|3x^2+y| < \varepsilon \quad \text{för alla } (x,y) \text{ sådana att} \\ &0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

På samma sätt som i föregående exempel får vi

$$|3x^2+y| \leq 3(x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\left(3\sqrt{x^2+y^2}+1\right).$$

Om $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ så är parentesen ovan $\leq 4$, och alltså

$$|3x^2+y| \leq 4\sqrt{x^2+y^2}.$$

Om dessutom $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{4}\varepsilon$, så gäller tydligen

$$|3x^2 + y| \leq 4\sqrt{x^2+y^2} < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Därmed har vi visat att (3.6) gäller för $\delta = \min(1, \frac{1}{4}\varepsilon)$.

**Exempel 3.3.** Visa med hjälp av Definition 1 att funktionen $f(x,y) = x^2 - 3y + 2$ har gränsvärdet 3 då $(x,y) \to (2,1)$.

**Lösning.** Låt $\varepsilon$ vara ett godtyckligt tal $> 0$. Enligt Definition 1 gäller det att finna ett $\delta > 0$ så att

$$\begin{gathered} |(x^2 - 3y + 2) - 3| < \varepsilon \quad \text{för alla } (x,y) \text{ sådana att} \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Sätt $x - 2 = u,\ y - 1 = v$. Då är $x^2 - 3y + 2 - 3 = (u+2)^2 - 3(v+1) + 2 - 3 = u^2 + 2u - 3v$. Det påstående som skall visas kan alltså skrivas om så: det finns ett $\delta > 0$ så att

$$\begin{gathered} |u^2 + 2u - 3v| < \varepsilon \quad \text{för alla } (u,v) \text{ sådana att} \\ \sqrt{u^2+v^2} < \delta. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Men nu är uppgiften analog med Exempel 3.2. På grund av triangelolikheten är

$$\begin{aligned} |u^2 + 2u - 3v| &\leq |u|^2 + 2|u| + 3|v| \leq \\ &\leq (u^2+v^2) + 2\sqrt{u^2+v^2} + 3\sqrt{u^2+v^2} = \\ &= \sqrt{u^2+v^2}\left(\sqrt{u^2+v^2} + 5\right). \end{aligned}$$

Välj $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\varepsilon)$. Då gäller (3.8). Ty om $\delta$ är så vald, och $\sqrt{u^2+v^2} < \delta$, så är $\sqrt{u^2+v^2} + 5 < 6$, och alltså

$$\begin{aligned} |u^2 + 2u - 3v| &\leq \sqrt{u^2+v^2}\left(\sqrt{u^2+v^2} + 5\right) < \\ &< 6\sqrt{u^2+v^2} < 6\delta \leq 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**Övning 3.4.** Visa med hjälp av Definition 1 att funktionerna

a) $f(x,y) = 5x - 3y$

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy$

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = 2x^2 + 3x$

har gränsvärdet 0 då $(x,y) \to (0,0)$.

**Övning 3.5.** Betrakta villkoret i Definition 1 för ett fixt $\varepsilon$, d.v.s. villkoret

$$(P_\varepsilon)\begin{cases}\text{Det finns ett } \delta > 0 \text{ så att } |f(x,y)-A| < \varepsilon \text{ för alla } (x,y) \text{ sådana att}\\ 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta.\end{cases}$$

Visa att om villkoret $(P_\varepsilon)$ gäller för ett visst $\varepsilon$ så gäller det för alla större $\varepsilon$. D.v.s. om $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ och $(P_{\varepsilon_1})$ gäller, så gäller $(P_{\varepsilon_2})$.

**Ledning.** *Börja med att ta t.ex.* $\varepsilon_1 = 1$ *och* $\varepsilon_2 = 2$. *(Tro inte att du gjort fel om du tyckte det var oväntat lätt!)*

Om definitionsmängden för $f$ ej är hela $\mathbb{R}^2$ utan blott en punkterad cirkelskiva med medelpunkt i $(a,b)$ t.ex.

$$D = \left\{(x,y);\ 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \tfrac{1}{2}\right\},$$

så kan definitionen fortfarande tillämpas, ty om $\delta < \frac{1}{2}$ så är blott punkter $(x,y) \in D$ berörda av villkoret i definitionen (jämför föregående övning). Förhållandet är givetvis detsamma om $f$ är definierad i något delområde $V$ av $\mathbb{R}^2$ som innehåller en sådan cirkelskiva.

**Övning 3.6.** Sätt $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ då $y \neq 0$.
Visa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen att $f(x,y) \to \frac{1}{2}$ då $(x,y) \to (1,2)$.

Om $f$ ej ens är definierad i någon hel cirkelskiva med medelpunkt $(a,b)$, så måste villkoret (3.3) i definitionen ersättas med (se figur 7):

$$\begin{gathered}|f(x,y)-A| < \varepsilon \quad \text{för alla } (x,y) \text{ sådana att}\\ (x,y) \in D_f \quad \text{och } 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta.\end{gathered} \tag{3.3''}$$

**Övning 3.7.** Sätt $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$ för $x > 0$ och $y > 0$. Visa att $f$ *icke* har något gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.

**Övning 3.8.** Sätt $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$. Visa att $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$.

## 3.2 Gränsvärde då $(x, y) \to \infty$

**Definition 2.** *Man säger att $f(x, y)$ har gränsvärdet $A$ då $(x, y)$ går mot $\infty$ eller*

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = A,$$

*om följande gäller*

$$\begin{gathered}\text{för varje } \varepsilon > 0 \text{ finns ett } K \text{ så att} \\ |f(x, y) - A| < \varepsilon \quad \text{för alla } (x, y) \text{ sådana att } \sqrt{x^2 + y^2} > K.\end{gathered}$$

*Om $f$ blott är definierad i någon delmängd $D_f$ av $\mathbb{R}^2$ så måste förstås som vanligt sista raden i definitionen ersättas med*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \quad \text{för alla } (x, y) \text{ sådana att } (x, y) \in D_f \text{ och } \sqrt{x^2 + y^2} > K.$$

**Övning 3.9.** Undersök vilka av följande funktioner som har gränsvärde då $(x, y)$ går mot $\infty$, och beräkna gränsvärdet i förekommande fall.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + |x|}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2} & \text{då } x \geq 0 \\ -\frac{2}{1+x^2+y^2} & \text{då } x < 0. \end{cases}$

## 3.3 Satser om räkning med gränsvärden

Liksom i fallet en variabel behöver man veta exempelvis att gränsvärdet av en produkt alltid är lika med produkten av gränsvärdena, för att man skall slippa använda själva gränsvärdesdefinitionen så ofta.

**Sats 1.** *Antag $f$ och $g$ är funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ och att*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A \quad \text{och} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = B.$$

*Då gäller*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x, y) + g(x, y)\big) = A + B,$$

*och*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = AB.$$

*Om dessutom $B \neq 0$, så gäller*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}.$$

Sista delen av satsen kräver en kommentar. Det är inte säkert att funktionen $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ har hela $\mathbb{R}^2$ som definitionsmängd, eftersom $g(x,y)$ kan vara lika med noll för vissa $(x,y)$. Men om förutsättningen $B \neq 0$ är uppfylld, så måste $g(x,y)$ vara $\neq 0$ åtminstone i någon punkterad cirkelskiva med medelpunkt $(a,b)$ (varför?), och detta räcker ju för att gränsvärdet $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ då $(x,y) \to (a,b)$ skall kunna definieras.

Beviset för Sats 1 är fullständigt analogt med fallet en variabel. I själva verket kan beviset skrivas ord för ord exakt lika i det bägge fallen; man behöver blott ersätta $|x-a|$ med $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ för att få ett bevis som är giltigt i det aktuella fallet.

Givetvis gäller motsvarigheten till Sats 1 även för gränsvärden då $(x,y) \to \infty$.

**Övning 3.10.** Skriv upp ett bevis för Sats 1. Utgå lämpligen från beviset för motsvarande sats för funktioner av en variabel (Sats 1, kap 3.8 i [D], Sats 2.2.1 i [F]), och tänk efter vilka ändringar som behöver göras.

**Övning 3.11.** Gå på nytt igenom Övning 3.4, och använd denna gång Sats 1. Samma uppgift för Övning 3.6.

## 3.4 Kontinuitet

Låt $f = f(x,y)$ vara definierad i $\mathbb{R}^2$ eller i någon delmängd $D_f$ av $\mathbb{R}^2$. Antag att $(a,b) \in D_f$. I analogi med fallet en variabel gör vi följande definition.

**Definition 3.** *Funktionen $f$ säges vara* kontinuerlig i punkten $(a,b)$ *om gränsvärdet* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ *existerar och är lika med $f(a,b)$.*

**Övning 3.12.** Avgör vilka av följande funktioner som är kontinuerliga i $(0,0)$.

a) $f(x,y) = 1 + 2x + y^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2;$

b) $f(x,y) = 1 + 2x + 6y^2, \ \text{om } (x,y) \neq (0,0), \ f(0,0) = 2;$

c) $f(x,y) = 1 + x + y, \ \text{om } y \neq 0, \ f(x,y) = 2 \text{ om } y = 0;$

d) $f(x,y) = 1 + 2x, \ \text{om } x \geq 0, \ f(x,y) = 1 \text{ om } x < 0.$

**Definition 4.** *Funktionen $f$ säges vara* kontinuerlig*, om den är kontinuerlig i alla punkter i sitt definitionsområde.*

**Övning 3.13.** Visa att funktionerna $(x,y) \mapsto x$ och $(x,y) \mapsto y$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ är kontinuerliga.

**Sats 2.** *Om $f$ och $g$ är kontinuerliga i $(a,b)$, så är $f+g$ kontinuerlig i $(a,b)$. Om dessutom $g(a,b) \neq 0$, så är $f/g$ kontinuerlig i $f(a,b)$. Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $(a,b)$ och $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $f(a,b)$, så är den sammansatta funktionen $\phi = h \circ f$ kontinuerlig i $(a,b)$.*

**Bevis.** Påståendena i de två första meningarna följer genast av Sats 1 (jfr Följdsats 12, kap 3.8 i [D], sid 121, första stycket i [F]). Beviset för det sista påståendet är fullständigt analogt med beviset för motsvarande för funktioner av av en variabel (Följdsats 2, kap 3.11 i [D]). Genomför detaljerna som övning.

Ett uttryck på formen

$$P(s,t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s^i t^j,$$

där $a_{ij}$ är reella konstanter och $s$ och $t$ variabler, kallas för ett *polynom i två variabler*, och motsvarande funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$, $(s,t) \mapsto P(s,t)$, kallas för polynomfunktion, eller rätt och slätt polynom.

**Övning 3.14.** Visa att varje polynomfunktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ är kontinuerlig.

**Övning 3.15.** En funktion av formen $f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, där $P$ och $Q$ är polynom, kallas för *rationell funktion*. Funktionens definitionsområde är förstås

$$D_f = \{(x,y);\, Q(x,y) \neq 0\}\,.$$

Visa att varje rationell funktion är kontinuerlig.

**Övning 3.16.** Visa med hjälp av Sats 2 att följande funktioner är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$:

a) $(x,y) \mapsto \sin(x+y) + \ln(1+y^2)$

b) $(x,y) \mapsto \dfrac{\exp(2x+y^2)}{1+x^2+y^2}$.

**Övning 3.17.** Avgör (med hjälp av definitionerna 1, 3 och 4) huruvida följande funktioner är kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} x+y+1 & \text{för } y \geq 1, \\ 2x+1 & \text{för } y < 1. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{för } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{för } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

**Övning 3.18.** Visa att följande funktion *ej* är kontinuerlig i $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{då } x = 0 \text{ och då } y = 0 \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

(Observera att funktionerna av *en* variabel $x \mapsto f(x,0)$ och $y \mapsto f(0,y)$ dock är kontinuerliga.)

Ett intressantare exempel betraktas i nästa övning.

**Övning 3.19.** Sätt $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$ och $f(0,0) = 0$. Visa att funktionen av en variabel $x \mapsto f(x,y)$ är kontinuerlig för varje fixt $y$ och på samma sätt $y \mapsto f(x,y)$ är kontinuerlig för varje fixt $x$, men att funktionen $f$ ändå ej är kontinuerlig i $(0,0)$.

# Kapitel 4

# Partiella derivator och kedjeregeln

## 4.1 Partiella derivator

Begreppet partiell derivata för en funktion av två variabler är egentligen mycket lättare än begreppet kontinuitet, eftersom det bygger på att man håller en variabel i taget fix.

Låt $f$ var en funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$, och låt $(a, b)$ vara en punkt i $\mathbb{R}^2$. Gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

om det existerar, kallas för *partiella derivatan av $f$ med avseende på $x$ i punkten* $(a, b)$ och betecknas på något av följande sätt:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \qquad f'_x(a,b).$$

Tydligen är partiella derivatan m.a.p. $x$ i punkten $(a, b)$ ingenting annat än vanliga derivatan av funktionen av en variabel $x \mapsto f(x, b)$ i punkten $x = a$.

**Övning 4.1.** Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ för följande funktioner.

a) $x^2 + xy - 2x^2y^2$

b) $(x^2 + xy + 3xy^2)e^{xy}$

c) $\exp(x^2 + 3xy^2)$

d) $\arctan \frac{x}{y}$

e) $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

f) $x^y \quad (x > 0)$.

I motsats till fallet en variabel behöver en funktion av två variabler inte vara kontinuerlig i en punkt där bägge partiella derivatorna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar. Exempelvis funktionen i Övning 3.18 har bägge partiella derivatorna lika med 0 i $(0,0)$, men är ej kontinuerlig i $(0,0)$.

## 4.2 Riktningsderivata

Man säger att den partiella derivatan i punkten $(a,b)$ av $f(x,y)$ med avseende på $x$ säger något om hur $f(x,y)$ varierar när $(x,y)$ rör sig från punkten $(a,b)$ parallellt med $x$-axeln. Motsvarande gäller förstås för den partiella derivatan med avseende på $y$. Ibland kan man vilja ha information om hur $f(x,y)$ varierar då $(x,y)$ rör sig i någon riktning som ej är parallell med någon av axlarna. Detta leder till begreppet riktningsderivata. Om vi låter vektorn $\mathbf{w} = (u,v)$ ange riktningen i fråga så bildar vi riktningsderivatan så:

$$D_{\mathbf{w}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv)\Big|_{t=0}. \tag{4.1}$$

På grund av definitionen av vanlig derivata av en funktion av en variabel kan uttrycket i högra ledet ju även skrivas

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu, b+tv) - f(a,b)}{t}$$

Anmärkning: Man brukar vanligen förutsätta att $\mathbf{w}$ har längd 1 men här tillåter vi godtyckliga $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Observera att om $\mathbf{w} = (1,0)$ resp. $\mathbf{w} = (0,1)$, så är $D_{\mathbf{w}} f(a,b)$ lika med de partiella derivatorna i punkten $(a,b)$. (Se figur 8.)

**Övning 4.2.** Beräkna $D_{\mathbf{w}} f(a,b)$, om $(a,b) = (1,1)$ och $\mathbf{w} = (1,2)$ och

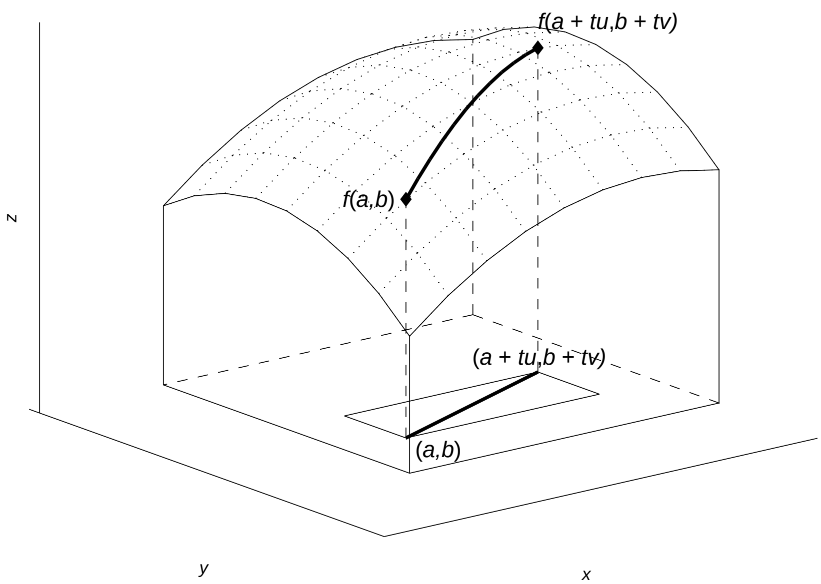
a) $f(x,y) = e^{x+2y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Kan vi uttrycka $D_{\mathbf{w}} f$ med hjälp av $u$ och $v$ och de partiella derivatorna? Vi kan gissa svaret genom att betrakta en lineär funktion $f(x,y) = Ax + By + C$. I detta fall är $f'_x = A$ i varje punkt och $f'_y = B$ i varje punkt. Vidare får vi genast $D_{\mathbf{w}} f = Au + Bv$. Alltså gäller i detta fall

$$D_{\mathbf{w}} f = u f'_x + v f'_y \tag{4.2}$$

i varje punkt. Vi skall visa att formeln (4.2) i själva verket gäller för "godtyckliga" funktioner $f$.




**Figur 8.** Illustration till definitionen av riktningsderivatan $D_{(u,v)}f(a,b)$.

## 4.3 Kedjeregeln

Det är då naturligt att på en gång betrakta ett något allmännare fall, som i själva verket inte är svårare. Om vi ersätter funktionen $t \mapsto a + tu$ i högra ledet av (4.1) med en funktion $\phi(t)$ och på samma sätt ersätter $t \mapsto b + tv$ med $\psi(t)$, så övergår uttrycket i högra ledet av (4.1) i

$$\frac{d}{dt} f\big(\phi(t), \psi(t)\big)\bigg|_{t=0}. \tag{4.3}$$

Vi kan nu formulera satsen om hur man räknar ut derivatan av den sammansatta funktionen $f\big(\phi(t), \psi(t)\big)$. Givetvis måste vi förutsätta att $\phi$ och $\psi$ är deriverbara och att de partiella derivatorna av $f$ existerar. För att undvika vissa patologiska fall (se Övning 3.19), måste vi dessutom förutsätta att $f'_x$ och $f'_y$ är kontinuerliga.

**Sats 3 (Kedjeregeln).** *Antag att $\phi$ och $\psi$ är deriverbara funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Då gäller*

$$\frac{d}{dt} f\big(\phi(t), \psi(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt}. \tag{4.4}$$

Här skall givetvis $\frac{d\phi}{dt}$ och $\frac{d\psi}{dt}$ uträknas i punkten $t$ och $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ i punkten $\big(\phi(t), \psi(t)\big)$.

Formeln (4.4) generaliserar (4.2), ty om $\phi(t) = a + tu$, så är $\frac{d\phi}{dt} = u$ och analogt för $\psi(t)$.

Ofta betecknar man derivatan $\frac{d\phi}{dt}$ med $\frac{dx}{dt}$ (derivatan av *variabeln* $x$ med avseende på *variabeln* $t$). Kedjeregeln får då den synnerligen naturliga formen

$$\frac{d}{dt} f\big(\phi(t), \psi(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

**Bevis (för Sats 3).** Vi har att betrakta differenskvoten

$$\frac{1}{h}\Big[f\big(\phi(t+h), \psi(t+h)\big) - f\big(\phi(t), \psi(t)\big)\Big],$$

vilket vi kan skriva om som

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\Big[f\big(\phi(t+h), \psi(t+h)\big) - f\big(\phi(t+h), \psi(t)\big)\Big] + \\ + \frac{1}{h}\Big[f\big(\phi(t+h), \psi(t)\big) - f\big(\phi(t), \psi(t)\big)\Big] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Den första av dessa termer kan med hjälp av medelvärdessatsen använd på funktionen $y \mapsto f\big(\phi(t+h), y\big)$ skrivas

$$\frac{1}{h}\big(\psi(t+h) - \psi(t)\big) \cdot f'_y\big(\phi(t+h), \eta\big),$$

där $\eta$ är någon punkt i intervallet $\big[\psi(t), \psi(t+h)\big]$. (Se figur 9.) Då $h \to 0$ så konvergerar

$$\frac{1}{h}\big(\psi(t+h) - \psi(t)\big)$$

mot $\psi'(t)$. Eftersom $f'_y$ är kontinuerlig (som funktion av *två* variabler, obs!) enligt förutsättningen, så konvergerar

$$f'_y\big(\phi(t+h), \eta\big)$$

mot
$$f'_y\big(\phi(t+h), \psi(t)\big)$$

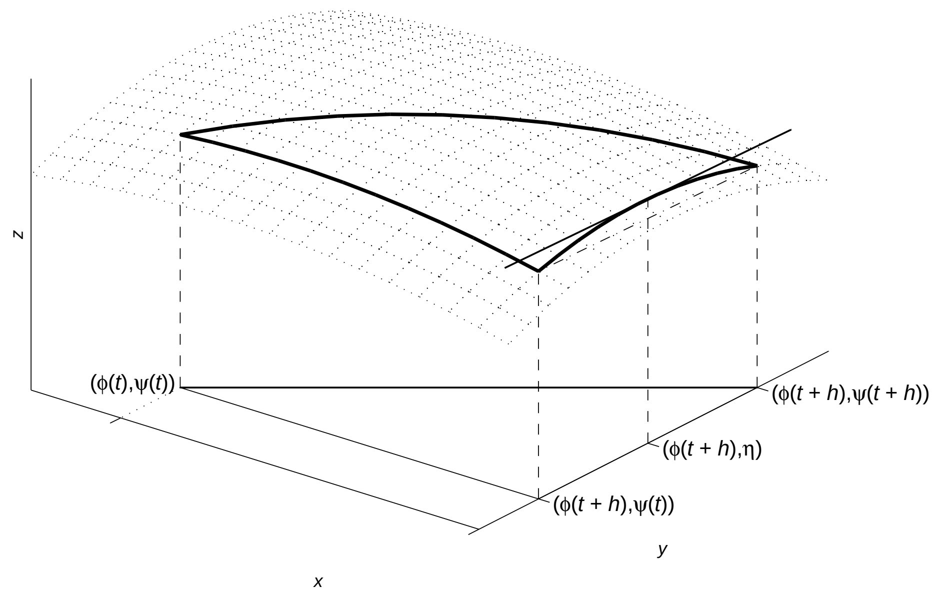
då $h \to 0$. Första termen i (4.5) konvergerar således mot

$$\psi'(t) \cdot f'_y\big(\phi(t+h), \psi(t)\big).$$

Om vi förfar på precis analogt sätt med andra termen i (4.5), så ser vi att denna då $h \to 0$ konvergerar mot $\phi'(t) \cdot f'_x\big(\phi(t+h), \psi(t)\big)$. Därmed är Sats 3 bevisad.

**Övning 4.3.** Utför alla detaljerna i räkningen med andra termen i (4.5) i beviset för Sats 3.

**Övning 4.4.** Förklara varför beviset ej fungerar om $f'_x$ och $f'_y$ blott är kontinuerliga funktioner i vardera variabeln medan den andra hålls fix. (Satsen är ej heller sann i detta fall.)




**Figur 9.** Illustration till beviset för Sats 3.

Man säger att $f$ är *kontinuerligt deriverbar* om $f'_x$ och $f'_y$ existerar och är kontinuerliga.

Observera att Sats 3, eller rättare specialfallet (4.3), visar att $D_{\mathbf{w}}f$ är en *lineär* funktion av vektorn $\mathbf{w}$, d.v.s. om $a$ och $b$ är godtyckliga reella tal och $\mathbf{w}$ och $\mathbf{z}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^2$, så är

$$D_{a\mathbf{w}+b\mathbf{z}}f = aD_{\mathbf{w}}f + bD_{\mathbf{z}}f \tag{4.6}$$

och således speciellt

$$D_{a\mathbf{w}}f = aD_{\mathbf{w}}f \tag{4.7}$$

i varje punkt $(x, y)$. (Övning: visa att (4.6) följer av (4.2).) Formeln (4.7) säger oss hur riktningsderivatan beror av längden av vektorn $\mathbf{w}$. Nämligen om t.ex. vektorn $\mathbf{w}$ görs dubbelt så lång, så blir riktningsderivatan $D_{\mathbf{w}}f$ dubbelt så stor, och så vidare. Detta innebär bl.a. att om man vill jämföra funktionens tillväxthastighet i de två riktningarna som anges av vektorerna $\mathbf{w}$ och $\mathbf{z}$ så bör $\mathbf{w}$ och $\mathbf{z}$ ha samma längd, lämpligen 1.

**Övning 4.5.** Låt $f(x, y) = x^2 + 3y - 1$. Beräkna $D_{(0,1)}f(2, 1)$ och $D_{(3,-1)}f(2, 1)$. Vilket av de två talen är störst? Beräkna även $D_{\mathbf{w}}f(2, 1)$ där $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$ (observera att $\mathbf{w}$ har längden 1), och avgör i vilken av de två riktningarna som $f$ växer snabbast.

**Övning 4.6.** Beräkna $\frac{dh}{dt}$ på två sätt (direkt resp. med hjälp av kedjeregeln då $h(t) = f\big(\phi(t), \psi(t)\big)$ och

a) $f(x,y) = x^2 y,\qquad \phi(t) = 2t,\qquad \psi(t) = t,$

b) $f(x,y) = e^{2x+y},\qquad \phi(t) = t^2,\qquad \psi(t) = 2t,$

c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2,\qquad \phi(t) = \sin t,\qquad \psi(t) = \cos t,$

d) $f(x,y) = x^2 + 2y^2,\qquad \phi(t) = 2t,\qquad \psi(t) = -5t,$

e) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\qquad \phi(t) = at,\qquad \psi(t) = bt.$

Observera att beräkning av de partiella derivatorna till en sammansatt funktion av formen

$$h(x,y) = g\big(f(x,y)\big),$$

där $g$ är en funktion av *en* variabel, kan göras med hjälp av den vanliga kedjeregeln för funktioner av en variabel. Ty exempelvis vid beräkningen av $h'_x$ skall ju $y$ hållas fix, varvid högra ledet kan uppfattas som sammansättningen av två funktioner av en variabel. Vi får således

$$h'_x = g' f'_x \text{ och } h'_y = g' f'_y.$$

Observera att $g'$ skall uträknas i punkten $f(x,y)$. Vi skulle således egentligen skriva $h'_x(x,y) = g'\big(f(x,y)\big) f'_x(x,y)$ om vi vore noggranna.

Likaledes bör man observera att *partiella* derivator av en sammansatt funktion ibland kan beräknas med hjälp av Sats 3. Ty t.ex. om $f(x,y)$ är en funktion av variablerna $x$ och $y$ och funktionen $h(s,t)$ definieras genom $h(s,t) = f\big(\phi(s,t), \psi(s,t)\big)$ och alla funktioner är kontinuerligt deriverbara, så får vi av Sats 3 genom att hålla $s$ fix

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

**Övning 4.7.** Antag att $h(x,y) = f(xy)$, där $f$ är en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$x\frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

**Övning 4.8.** Antag att $h(x,y) = x^2 f\left(\frac{x}{y}\right)$ för $y \neq 0$, där $f$ är en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} - 2h = 0.$$

**Övning 4.9.** Låt $u(x, y)$ vara kontinuerligt deriverbar och definiera $z$ som funktion av $s$ och $t$ genom

$$z(s,t) = u(As + Bt, -Bs + At),$$

där $A$ och $B$ är reella konstanter. Visa att

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \left(A^2 + B^2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

**Övning 4.10.** Låt $u(x, y)$ vara kontinuerligt deriverbar och definiera $z$ som funktion av $r$ och $\theta$ för $r > 0$

$$z(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Visa att

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

**Övning 4.11.** Antag att $f(x, y)$ är kontinuerligt deriverbar och att $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ i hela $\mathbb{R}^2$.

a) Visa att man ur ekvationen

$$z = f(x, y)$$

kan lösa $y$ som funktion av $x$ och $z$, d.v.s. att det finns en kontinuerligt deriverbar funktion $g(x, z)$ definierad i någon delmängd av $\mathbb{R}^2$ så att

$$z = f(x,y) \iff y = g(x,z),$$

och således

$$z = f\big(x, g(x,z)\big),$$

och

$$y = g\big(x, f(x,y)\big),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.8}$$

**Ledning.** *Använd att funktionen $y \mapsto f(x, y)$ är omvändbar för varje fixt $x$.*

b) Visa formlerna

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1\Big/\frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x}\Big/\frac{\partial g}{\partial z},$$

eller med ett mer suggestivt skrivsätt

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1\Big/\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial x}\Big/\frac{\partial y}{\partial z}.$$

**Ledning.** *Beräkna partiella derivatorna m.a.p. $x$ respektive $y$ för bägge leden av (4.8).*

**Övning 4.12.**

a) Låt $f$ vara en deriverbar funktion av en variabel, och låt $u(x,y)$ vara definierad genom

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{för } y \neq 0. \tag{4.9}$$

Visa att

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{4.10}$$

b) Låt $f$ vara som i a). Visa att var och en av funktionerna

$$\begin{aligned} u(x,y) &= f\left(\frac{y}{x}\right), && x \neq 0, \\ u(x,y) &= f\left(\frac{x}{x-y}\right), && x \neq y, \\ u(x,y) &= f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), && (x,y) \neq (0,0), \end{aligned}$$

satisfierar (4.10).

c) Antag förutom förutsättningarna i a) att $f$ är ”deriverbar i $\infty$”, d.v.s. funktionen $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right),\ t \neq 0,\quad g(0) = \lim_{t\to\infty} f(t)$, är deriverbar i $t = 0$. Definiera $u(x,y)$ i området $D = \big\{(x,y);\quad (x,y) \neq (0,0)\big\}$ genom (4.9) samt

$$u(x,0) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

Visa att $u$ satisfierar (4.10) i hela $D$.

d) Diskutera sambandet mellan resultatet i c) och resultaten i a) och b). (Exempelvis: visa att a) och b) $\Rightarrow$ c).)

e) Låt $G(s,t)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion av två variabler och sätt för $(x,y) \neq (0,0)$

$$u(x,y) = G\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Visa att $u$ satisfierar (4.10) i hela området $D$. (Försök minska räknearbetet genom att utnyttja lämpliga resultat ovan.)

f) För varje $\theta$ i intervallet $0 \leq \theta < 2\pi$, beteckna med $L_\theta$ den s.k. halvstrålen i $\mathbb{R}^2$

$$L_\theta = \big\{(x,y); x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r > 0\big\}.$$

Antag att $u$ är kontinuerligt deriverbar i $D$ och att $u$ är *konstant på varje* $L_\theta$. Visa att $u$ satisfierar (4.10), t.ex. genom att för fixa $x$ och $y$ uppfatta uttrycket i vänstra ledet av (4.10) som en riktningsderivata.

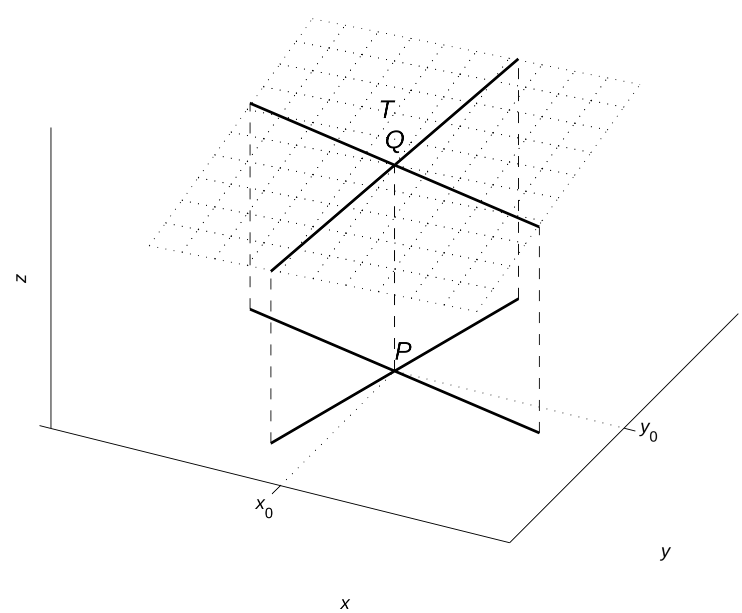
g) Visa omvändningen till f), nämligen: om $u$ är kontinuerligt deriverbar i $D$ och uppfyller (4.10), så är $u$ konstant på varje $L_\theta$.

h) Visa att resultaten i a) t.o.m. e) följer av resultatet i f).

# Kapitel 5

# Gradient och tangentplan

Vi har sett att om $f(x, y)$ är en lineär funktion av $x$ och $y$, d.v.s. $f(x, y) = Ax + By + C$, så betyder ekvationen $z = f(x, y)$, d.v.s. $z = Ax + By + C$ ett plan $T$ i $xyz$-rummet. Vi tänker oss nu $xy$-planet horisontellt och $z$-axeln vertikal, riktad uppåt. Låt $P = (x_0, y_0)$ vara en given punkt i $xy$-planet. Då är $Q = (x_0, y_0, Ax_0 + By_0 + C)$ den punkt på planet $T$ som ligger rakt ovanför $P$.




**Figur 10.** Illustration till frågorna I och II på sidorna 28–29. De grova heldragna linjerna illustrerar den brantaste respektive den horisontella linjen genom punkten $Q$ i planet $T$ samt deras projektioner i $xy$-planet.

Betrakta följande två problem.

I. I vilken riktning skall $P$ röra sig för att $Q$ skall röra sig *så brant som möjligt.*

II. I vilken riktning skall $P$ röra sig för att $Q$ skall röra sig *horisontellt.*

Annorlunda uttryckt: man befinner sig på en plan bergsluttning och önskar bestämma kompasskursen för en stig som går *på konstant höjd* resp för en stig som har *maximal branthet.*

Problemen är ju mycket lätta att lösa eftersom $f$ är lineär. Låt vektorn $(u, v)$ ange förflyttningen av punkten $P$. Om $x$ ändras med $u$ och $y$ ändras med $v$, så ändras $z = Ax + By + C$ med

$$Au + Bv.$$

Härav ser vi genast att $z$ förblir konstant, om $Au+Bv = 0$, d.v.s. om vektorn $(u, v)$ *är ortogonal mot vektorn* $(A, B)$. Detta löser problemet II. För att lösa problemet I måste vi välja $(u, v)$ så att $Au+Bv$ får maximalt belopp då $(u, v)$ har given längd, t.ex. längd 1, d.v.s. $u^2 + v^2 = 1$. Man finner (Övning 5.1) att man i detta fall skall välja $(u, v)$ *parallell med* $(A, B)$.

Vi vill nu studera motsvarande problem då funktionen $f(x, y)$ ej längre förutsätts lineär, d.v.s. bergsluttningen ej längre är plan. Problemen I och II kan nu formuleras bekvämt med hjälp av riktningsderivatan.

I. Bestäm vektorn $\mathbf{w} = (u, v)$ med längden $|\mathbf{w}| = 1$ så att $D_{\mathbf{w}} f(x_0, y_0)$ blir så stor som möjligt.

II. Bestäm $\mathbf{w} = (u, v)$ med $|\mathbf{w}| = 1$ så att $D_{\mathbf{w}} f(x_0, y_0) = 0$.

Om vi antar att de partiella derivatorna till $f$ är kontinuerliga, så kan vi genast lösa dessa problem. Ty om vi sätter $A = f'_x(x_0, y_0)$ och $B = f'_y(x_0, y_0)$, så gäller enligt Sats 3:

$$D_{\mathbf{w}} f(x_0, y_0) = uA + vB.$$

Lösningen blir alltså densamma som nyss, nämligen i det första fallet att $\mathbf{w} = (u, v)$ skall väljas parallell med $(A, B) = (f'_x, f'_y)$, i det andra fallet att $\mathbf{w}$ skall väljas ortogonal mot samma vektor.

Vektorn $(f'_x, f'_y)$ brukar kallas *gradienten* för funktionen $f$, och betecknas ofta $\operatorname{grad} f$. Gradientens värde i en given punkt anger alltså den riktning i vilken funktionen tillväxer snabbast i punkten.

**Övning 5.1.** Låt $A$ och $B$ vara givna reella tal och sätt $f(\alpha) = A\cos\alpha + B\sin\alpha$ för $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Visa att största och minsta värdet för $f$ är respektive $\sqrt{A^2 + B^2}$ och $-\sqrt{A^2 + B^2}$. Visa att dessa bägge värden antas i punkter $\alpha$ för vilka vektorn $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ är parallell med vektorn $(A, B)$.

**Övning 5.2.** Sätt $f(x, y) = x^2 + y^2$. Beräkna $\operatorname{grad} f$ i punkten $(2, 1)$. Beräkna $D_{\mathbf{w}} f(2, 1)$ för några olika vektorer $\mathbf{w}$ med längden 1, t.ex. $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Verifiera att $D_{\mathbf{w}} f(2, 1)$ får sitt största värde då $\mathbf{w}$ är parallell med $\operatorname{grad} f$. Upprita cirkeln $x^2 + y^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ i $xy$-planet, och verifiera att $\operatorname{grad} f$ är ortogonal mot cirkelbågen i punkten $(2, 1)$.

Vi har sett att gradienten för $f$ är ortogonal mot den riktning $\mathbf{w}$ för vilken riktningsderivatan $D_{\mathbf{w}}$ är lika med noll. Den sistnämnda riktningen anger också riktningen för tangenten till den nivåkurva $f(x, y) = C$ som går genom punkten. För att se att det alltid måste förhålla sig på detta sätt, förutsatt att nivåkurvan överhuvudtaget har en tangent i punkten, kan vi resonera på följande sätt. Antag att $t \mapsto \big(\phi(t), \psi(t)\big)$ är en parameterframställning av en nivåkurva $\Gamma$ till $f$. Vi antar som förut att alla funktioner har kontinuerliga derivator. Tangentriktningen till $\Gamma$ i punkten $(x_0, y_0) = \big(\phi(t), \psi(t)\big)$ anges av vektorn $\big(\phi'(t_0), \psi'(t_0)\big)$, förutsatt att den sistnämnda vektorn är $\neq (0, 0)$. Att $\Gamma$ är en nivåkurva innebär att funktionen $t \mapsto f\big(\phi(t), \psi(t)\big)$ är konstant. Genom att derivera med avseende på $t$ och använda Sats 3 får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\right) = 0,$$

där punkten i mittersta ledet står för skalärprodukt. Detta bevisar påståendet.

Eftersom vektorn $\operatorname{grad} f$ i varje punkt är ortogonal mot tangenten till nivåkurvan genom punkten, så säger man också att $\operatorname{grad} f$ är *normal* till nivåkurvan själv.

En ännu bättre helhetsbild av förhållandena får man om man betraktar *tangentplanet* till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$ nämligen planet med ekvationen

$$z = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0). \tag{5.1}$$

Den lineära funktionen av $x$ och $y$ i högra ledet har samma partiella derivator i $(x_0, y_0)$ som $f(x, y)$ och därför samma riktningsderivata i alla riktningar. Funktionen (5.1) är den lineära funktion som bäst approximerar funktionen $f(x, y)$ i den omedelbara närheten av $(x_0, y_0)$. Eller i geometriskt språk: planet (5.1) är det plan som bäst approximerar ytan $z = f(x, y)$ i närheten av punkten $(x_0, y_0)$.

**Exempel 5.1.** Skissera nivåkurvorna för funktionen $f(x, y) = xy$, $x > 0$, $y > 0$. Ange riktningen för tangenten till nivåkurvan genom $(2, 3)$. Beräkna $\operatorname{grad} f$ i punkten $(2, 3)$. Verifiera att $\operatorname{grad} f$ är ortogonal mot tangenten till nivåkurvan i $(2, 3)$.

**Lösning.** Ekvationen för nivåkurvan genom $(2, 3)$ är $xy = 2 \cdot 3 = 6$, eller $y = 6/x$. Riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $y = 6/x$ i punkten $(2, 3)$ är $\big[-6/x^2\big]_{x=2} = -\frac{3}{2}$. Tangentens riktning anges alltså av vektorn $(1, -\frac{3}{2})$. Gradienten $\operatorname{grad} f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ är $(y, x)$. Insättning av $x = 2$, $y = 3$ ger $\operatorname{grad} f = (3, 2)$. Vi verifierar slutligen att de båda vektorerna är ortogonala genom att bilda deras skalära produkt: $(1, -\frac{3}{2}) \cdot (3, 2) = 1 \cdot 3 + (-\frac{3}{2}) \cdot 2 = 3 - 3 = 0$. (Rita figur.)

Den snabbaste metoden att beräkna nivåkurvans tangentriktning är i regel att beräkna $\operatorname{grad} f$ och sedan söka en vektor som är ortogonal mot denna.

**Exempel 5.2.** Låt $f$ vara samma funktion som i Exempel 5.1. Ange en vektor som är parallell med tangenten till nivåkurvan genom $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

**Lösning.** Gradienten i $(x_0, y_0)$ är $(y_0, x_0)$. Ortogonal häremot är t.ex. vektorn $(-x_0, y_0)$, vilken således löser vårt problem.

**Övning 5.3.** Sätt $f(x,y) = x^2 - 2y$. Skissera nivåkurvorna $f(x,y) = C$ för några olika värden på $C$. Beräkna $\operatorname{grad} f$ samt ange en vektor som är parallell med tangenten till nivåkurvans tangent i en godtycklig punkt $(x_0, y_0)$.

**Övning 5.4.**

a) Sätt $u(x,y) = x^2+2y^2$, $\quad v(x,y) = \big(x^2 + 2y^2\big)^2$ och $w(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + 2y^2}$. Visa att $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} v$ och $\operatorname{grad} w$ är parallella i varje punkt.

b) Antag att $f$ är en deriverbar funktion av en variabel och $z(x,y)$ en kontinuerligt deriverbar funktion av två variabler. Sätt $Z(x,y) = f\big(z(x,y)\big)$. Visa att $\operatorname{grad} Z$ och $\operatorname{grad} z$ är parallella i varje punkt. Härled härur resultatet i a).

**Övning 5.5.** Det gäller också en omvändning till resultatet i Övning 5.4 b), nämligen – i stort sett – om $Z(x,y)$ och $z(x,y)$ är två funktioner vilkas gradienter är parallella i varje punkt av ett område, så finns ett samband mellan $Z(x,y)$ och $z(x,y)$ via en funktion av en variabel såsom ovan. Visa följande specialfall härav:

a) Antag att $u(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar i hela planet och att $\operatorname{grad} u$ överallt är $\neq (0,0)$ och parallell med $x$-axeln. Då är $u(x,y)$ oberoende av $y$, d.v.s. det finns en funktion $f(x)$ av en variabel, så att $u(x,y) = f(x)$ för alla $x$ och $y$.

b) Antag att $u(x,y)$ är kontinuerligt deriverbar i området $D = \big\{(x,y);\, x > 0,\ y > 0\big\}$ och att $\operatorname{grad} u$ är $\neq (0,0)$ och parallell med vektorn $(y,x)$ i varje punkt i $D$. Visa att det finns en funktion $f$ av en variabel så att $u(x,y) = f(xy)$ för alla $(x,y) \in D$.

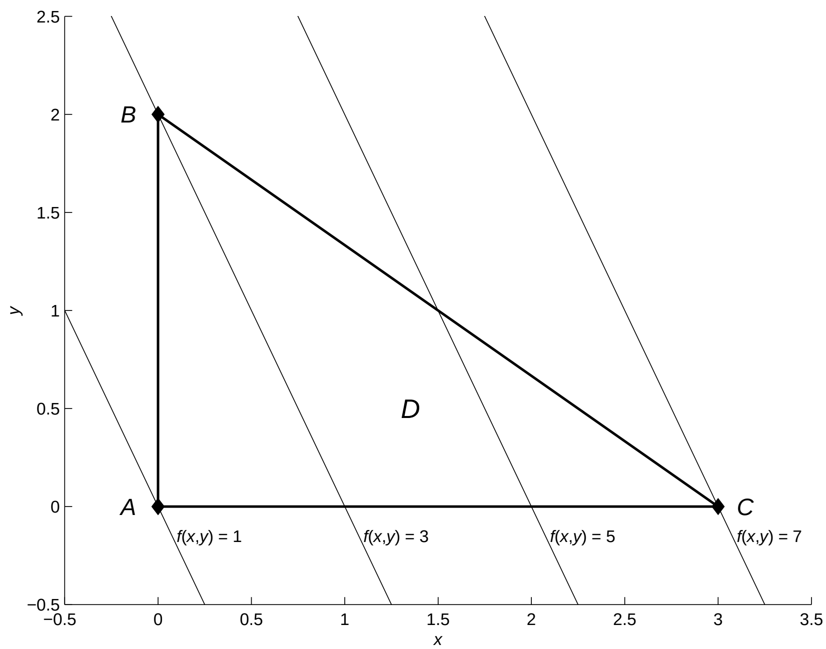
**Ledning.** *Visa att för godtyckligt $C > 0$, $\frac{d}{dx} u\left(x, \frac{C}{x}\right) = 0$ och således $u\left(x, \frac{C}{x}\right) = u(1, C)$ för alla $x > 0$. Sätt $C = xy$ i denna likhet och försök tolka resultatet. (Jfr Övning 4.7 och Övning 4.12.)*

# Kapitel 6

# Undersökning av extremvärden

Detta avsnitt utgörs av en mycket kort och ofullständig inledning till teorin om extremvärden för en funktion av två variabler. En utförligare behandling av samma fråga ges i fortsättningskursen.

Vi börjar med att betrakta ett exempel.




**Figur 11.** Nivåkurvor för funktionen $f(x, y) = 2x + y + 1$ i området $D$.

Låt $D$ vara mängden av punkter i triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(3, 0)$ och $(0, 2)$ *inklusive* de begränsande räta linjestyckena. Som bekant kallar man punkterna på de tre linjestyckena för *randpunkter* till området $D$, och övriga punkter i $D$ kallas för *inre punkter* till $D$. Antag nu att en funktion $f$ är given på $D$, t.ex. funktionen

$$f(x, y) = 2x + y + 1$$

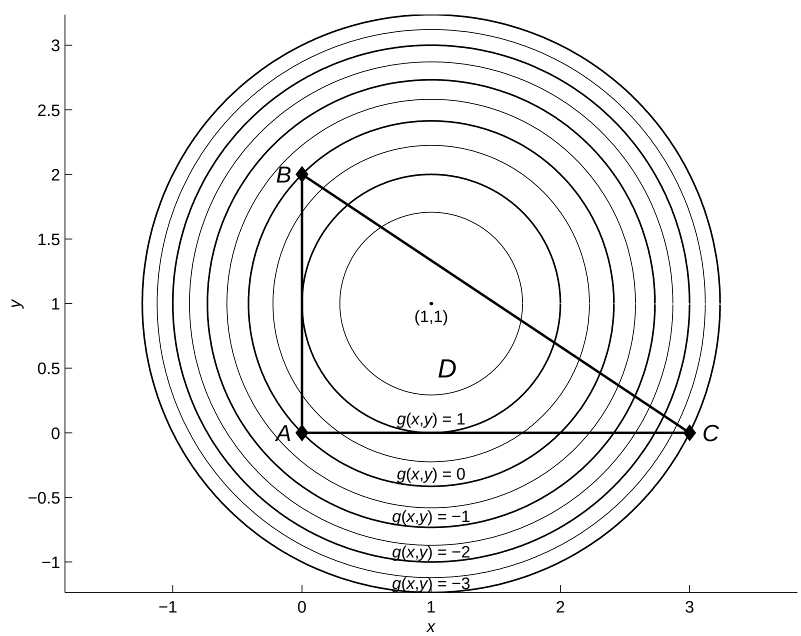
Vilket är denna funktions största värde i $D$?

Ofta får man en ganska god uppfattning om hur en funktion av två variabler varierar genom att betrakta funktionens nivåkurvor $f(x, y) =$ konstant. I detta fall är nivåkurvorna räta linjer $2x + y + 1 = C$. Man ser strax att av de nivålinjer som skär $D$ är den som svarar mot det största värdet på $f$ den linje som går genom hörnet $C$ (se figur 11). Motsvarande värde på $f$ är $f(3, 0) = 7$, vilket således är det sökta maximivärdet.

Låt oss som ett andra exempel betrakta funktionen

$$g(x, y) = 2 - (x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 2x + 2y - x^2 - y^2.$$

Även i detta fall kan vi lätt finna nivåkurvorna. Dessa är cirklar med medelpunkt i $(1, 1)$. Mot den cirkel som har radien $R$ svarar funktionsvärdet $g(x, y) = 2 - R^2$. Största värdet erhålls tydligen för $R = 0$ nämligen i punkten $(1, 1)$ där $g$ har värdet 2. Observera att denna punkt ligger inom området $D$ (figur 12).




**Figur 12.** Nivåkurvor för funktionen $g(x, y) = 2 - (x - 1)^2 - (y - 1)^2$ i området $D$.

**Övning 6.1.** Sök *minsta* värdet i $D$ för var och en av de bägge ovan studerade funktionerna.

I många fall är det svårt att skaffa sig en tydlig bild av skaran av nivåkurvor för den givna funktionen. Vi behöver därför en bättre metod att finna extrempunkter. Vi observerar då först att det sökta extremvärdet kan antas antingen i en randpunkt, som i första exemplet, eller i en inre punkt som i andra exemplet. Vi betraktar först fallet att extrempunkten är en randpunkt.

Det är i detta fall lätt att finna extrempunkten med metoder från envariabelanalysen. Låt oss beskriva tillvägagångssättet om $D$ är det nyss betraktade området, och $f$ är en godtycklig funktion (med kontinuerliga derivator). Randen till $D$ består av tre linjestycken, vilka vi betraktar i tur och ordning. På linjen $AB$ är $x = 0$ varför $f$ kan skrivas $f(0, y),\ 0 \leq y \leq 2$, vilket är en funktion av en variabel. Vi söker extremvärdena till denna funktion på sitt intervall $0 \leq y \leq 2$. Sedan gör vi likadant med de övriga randstyckena. På $AC$ får vi funktionen $f(x, 0),\ 0 \leq x \leq 3$. Linjen $BC$ har ekvationen $3y + 2x - 6 = 0,\ 0 \leq x \leq 3$, varför $f$ där kan skrivas t.ex. så:

$$f\big(x, (-2x + 6)/3\big), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Även detta är en känd funktion av en variabel ($f$ är ju en given funktion), varför vi kan beräkna extremvärdena på intervallet $0 \leq x \leq 3$. Slutligen, när vi nu känner extremvärdena på de tre randstyckena $AB$, $BC$ och $AC$ var för sig, så behöver vi blott jämföra värdena för att finna funktionens största och minsta värde på hela randen.

Det återstår att betrakta fallet att extremvärdet är en inre punkt i $D$, samt att finna en metod att avgöra huruvida det ena eller andra fallet är för handen. Lösningen ges av följande faktum: *extrempunkten, om den är en inre punkt, måste finnas med bland lösningarna till systemet* $f'_x = f'_y = 0$. Detta faktum är så viktigt att vi skall formulera det och bevisa det ordentligt.

Vi kan dock redan nu formulera vår metod för att finna extremvärdena till en kontinuerligt deriverbar funktion $f$ i ett område $D$. (Vi antar att $D$ är ett begränsat område och att randen till $D$ består av ändligt många deriverbara kurvstycken. Vidare måste vi, om vi skall vara noggranna, anta att $f$ har kontinuerliga derivator i någon omgivning till det slutna området $D$.)

I. Sök alla lösningar i $D$ till systemet

$$f'_x = f'_y = 0.$$

Beräkna värdet av $f$ i var och en av dessa punkter.

II. Sök största och minsta värdet för $f$ på randen av $D$.

III. Sök det största och minsta av alla de under I och II funna värdena. Detta är största resp. minsta värdet av $f$ i D.

Innan vi formulerar den förutskickade satsen skall vi definiera begreppet *lokal extrempunkt*. Vi behöver därvid en beteckning för mängden

$$S_r(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\right\}$$

d.v.s. cirkelskivan med radie $r$ och medelpunkt i $(a, b)$ (exklusive randen). I definitionen förekommer begreppet inre punkt till definitionsområdet för $f$. Inre punkter kallas alla punkter i mängden som inte är randpunkter till mängden. Vi har inte gjort någon generell definition av vad som menas med randpunkt till en mängd, men för de mängder som vi skall arbeta med kommer det aldrig att vara någon som helst svårighet att avgöra vilka punkter som är randpunkter och vilka som är inre punkter. [1]

**Definition 5.** *En punkt* $(a, b)$ *som är inre punkt till definitionsområdet för funktionen* $f$ *kallas för* lokal maximipunkt för $f$ *om det finns ett* $r > 0$ *så att*

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad \textit{för alla} \quad (x, y) \in S_r(a, b)$$

Lokal minimipunkt *definieras analogt.*

I stället för maximum säger man ibland *absolut maximum* för att framhäva att det ej är fråga om ett lokalt maximum.

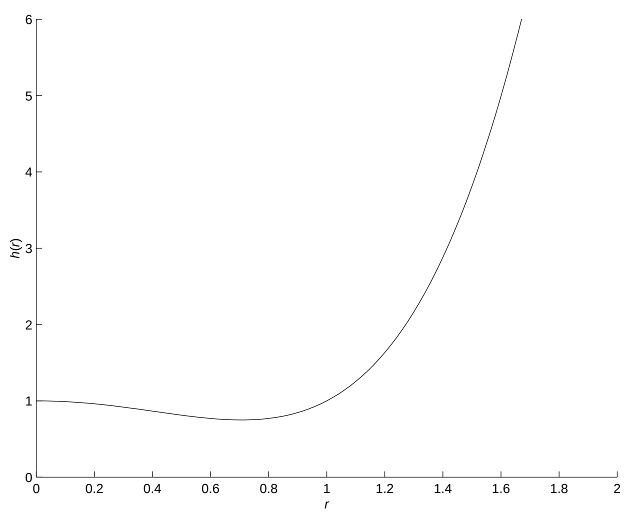
Låt t.ex. $D$ vara cirkelskivan

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

och $f$ vara funktionen

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2$$

för $(x, y) \in D$. Då är origo en lokal men ej absolut maximipunkt. Varje punkt på randen till $D$ är absolut maximipunkt svarande mot funktionsvärdet 13. Ty nivåkurvorna för $f$ är cirklarna $C_r = \left\{(x, y); x^2 + y^2 = r^2\right\}$, varvid $f$ har det konstanta värdet $1 - r^2 + r^4$ på $C_r$. Funktionen $h(r) = 1 - r^2 + r^4$ har ett lokalt maximum i $r = 0$, erftersom $h''(0) = -2 < 0$ (se figur 13).




**Figur 13.** Illustration till funktionen $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 1 - r^2 + r^4$.

Om funktionen $f(x, y)$ har mycket enkel form, så kan man ibland finna extrempunkterna utan att använda sig av de partiella derivatorna.

[1] För en godtycklig delmängd $D$ av $\mathbb{R}^2$ säges en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tillhöra *randen till* $D$, om för godtyckligt litet $r$ cirkelskivan $S_r(a, b)$ innehåller såväl punkter i $D$ som i komplementet till $D$.

**Övning 6.2.** Låt $D$ vara det triangulära området som definierades ovan, och låt f vara funktionen

$$f(x,y) = |x-y| \quad \text{för} \quad (x,y) \in D.$$

Sök funktionens alla lokala maxima och minima i $D$ samt dess största och minsta värde i $D$.

**Sats 4.** *Antag att $(a,b)$ är en inre punkt i definitionsmängden för $f$ och att $f$ har en lokal extrempunkt i $(a,b)$. Antag vidare att de partiella derivatorna $f'_x$ och $f'_y$ existerar i $(a,b)$. Då är*

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0.$$

**Bevis.** Eftersom $(a,b)$ är en lokal extrempunkt för $f$ så måste $a$ vara en lokal extrempunkt för funktionen av *en* variabel

$$x \mapsto f(x,b).$$

Enligt en känd sats (Sats 2 kap. 9.3 i [D], Sats 4.1.3 i [F]) måste då denna funktion ha derivatan lika med 0 i punkten $a$ (ty derivatan i $a$ existerar enligt förutsättningen), d.v.s. $f'_x(a,b) = 0$. På analogt sätt visas att $f'_y(a,b) = 0$.

Vi återvänder nu till det kursiverade påståendet på sidan 34. Vi ser att vi nu har bevisat detta påstående, eftersom varje extrempunkt som är inre punkt ju måste vara en lokal extrempunkt. Gå på nytt igenom beräkningsförfarandet på sidan 34, och tänk efter att Du förstår varför det måste fungera allmänt! (Vi *förutsätter* här att $f$ antar ett största värde någonstans i $D$; att så måste vara fallet följer i själva verket av att $f$ är en kontinuerlig funktion på en sluten begränsad mängd, jfr Sats 3 kap. 7.4 i [D], Sats 2.4.11 i [F].)

**Övning 6.3.** Sök största och minsta värdet för var och en av nedanstående funktioner i respektive område:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ i området $x^2 + y^2 \leq 4$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3y$ i området $|x| \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$

c) $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ i området $2x^2 + y^2 \leq 1$

d) $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)e^{x+y}$ i området $x^2 + y^2 \leq 1$

e) $f(x,y) = x^2y^2 + x^3y - 4x^2y$ i området $x \geq 0,\ y \geq 0, \quad x + y \leq 6$

f) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ i området $x^2 + y^2 \leq 4$
(inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; se sidan 56).

**Övning 6.4.**

a) Antag att man söker största och minsta värdet för en funktion $F$ av formen

$$F(x, y) = g(x) + h(y),$$

på området $D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, där $g$ och $h$ är deriverbara funktioner av en variabel. Diskutera vilka förenklingar i beräkningsproceduren som kan göras i detta fall.

b) Samma uppgift om $F$ har formen

$$F(x, y) = f\big(g(x) + h(y)\big),$$

där $f$ är en monoton funktion av en variabel.

c) Samma uppgift om $F$ har formen

$$F(x, y) = g(x)h(y).$$

**Övning 6.5.**

a) Undersök för vilket värde på $(x, y, z)$ i området

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = A$$

som funktionen

$$g(x, y, z) = xyz$$

antar sitt största värde, och beräkna detta värde.

**Ledning.** *Formulera problemet som ett tvåvariabelproblem genom att använda att* $z = A - x - y$.

b) Härled ur a) den s.k. olikheten mellan geometriska och aritmetiska mediet

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0, \tag{6.1}$$

samt visa att likhet gäller i (6.1) om och endast om $x = y = z$. (Anmärkning: det finns bättre metoder att visa sådana olikheter.)

# Kapitel 7

# Dubbelintegraler

## 7.1 Volym. Upprepad integral

Betrakta rektangeln

$$D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

och låt $f(x, y)$ vara en kontinuerlig funktion som är $\geq 0$ i hela $D$. Vi vill beräkna volymen av kroppen $K$ i $xyz$-rummet:

$$K = \{(x, y, z);\ (x, y) \in D,\ 0 < z < f(x, y)\}.$$

Det visar sig att volymen av $K$ kan beräknas med hjälp av en s.k. *upprepad integral.* Det gäller nämligen följande:

> Volymen av kroppen K anges av vilken som helst av de bägge upprepade integralerna
>
> $$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy, \text{ eller} \tag{7.1}$$
>
> $$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{7.2}$$

Uttrycket (7.1) skall tolkas på följande sätt. Först integrerar man funktionen $f(x, y)$ *för fixt* $y$ med avseende på $x$ från $a$ till $b$. Resultatet blir en funktion av $y$. Denna integreras så från $c$ till $d$. Uttrycket (7.2) skall tolkas analogt med den skillnaden att man här integrerar först med avseende på $y$, sedan med avseende på $x$.

Av det sagda följer speciellt att de bägge upprepade integralerna (7.1) och (7.2) har samma värde för alla kontinuerliga funktioner på rektangeln $D$. Samma sak gäller för en mycket större klass av funktioner, och speciellt gäller det för alla funktioner som vi skall betrakta här. Att (7.1) är lika med (7.2) är egentligen blott en kontinuerlig motsvarighet till det enkla faktum att för en ändlig dubbelsumma omkastning av summationsordningen är tillåten, d.v.s.

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} a_{mn}. \tag{7.3}$$

Denna likhet säger ju blott att ändligt många tal har samma summa om man adderar dem i två olika ordningsföljder. Kommutativa och associativa lagarna för addition, om man så vill!

**Övning 7.1.** Verifiera att om $M = 2$ och $N = 3$, så kan vänstra ledet i (7.3) skrivas

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}).$$

Skriv upp det analoga uttrycket för högra ledet och verifiera att likhet gäller.

Vi skall inte ge något strängt bevis för att volymen av $K$ anges av formlerna (7.1) eller (7.2). Men vi skall nu redovisa ett resonemang som dels ger en antydan om hur ett bevis skulle kunna gå till, dels bör kunna bidra till förståelsen av formlerna (7.1) och (7.2).[1]

Vi tänker oss att vi delar upp kroppen $K$ i $N$ stycken tunna skivor, $K_1 \dots K_N$, på följande sätt. Låt $y_1 = c,\ y_2 = c + h,\ y_3 = c + 2h, \dots, y_{N+1} = d$, där alltså $h = \frac{d-c}{N}$, och sätt

$$K_k = \big\{(x, y, z) \in K;\ y_k \leq y \leq y_{k+l}\big\}, \quad k = 1, \dots, N.$$

$K_k$ är alltså den del av kroppen som ligger mellan planen $y = y_k$ och $y = y_{k+1}$. (Se figur 14.) $K_k$ har formen av en skiva med tjockleken h, vars ena plana yta ser ut som ytan $B$ i figur 15.

Denna yta har arean

$$\int_a^b f(x, y_k)\, dx.$$

Volymen av skivan $K_k$ är därför approximativt

$$h \cdot \int_a^b f(x, y_k)\, dx,$$

om $h$ är litet. Summan av alla skivornas volymer är alltså approximativt

$$h \sum_{k=1}^{N} \int_a^b f(x, y_k)\, dx.$$

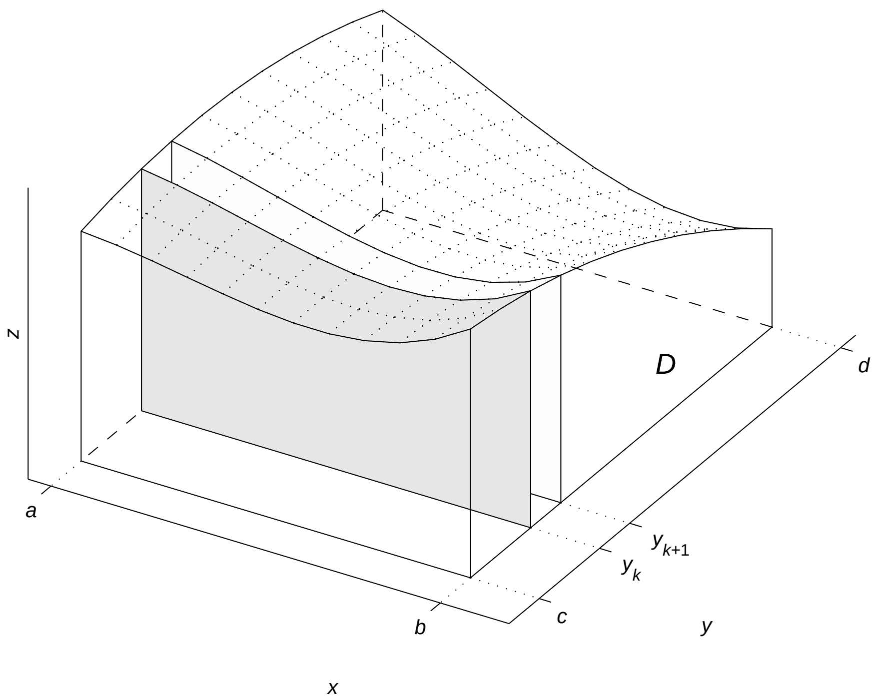
Detta kan skrivas

$$h \sum_{k=1}^{N} G(y_k), \tag{7.4}$$

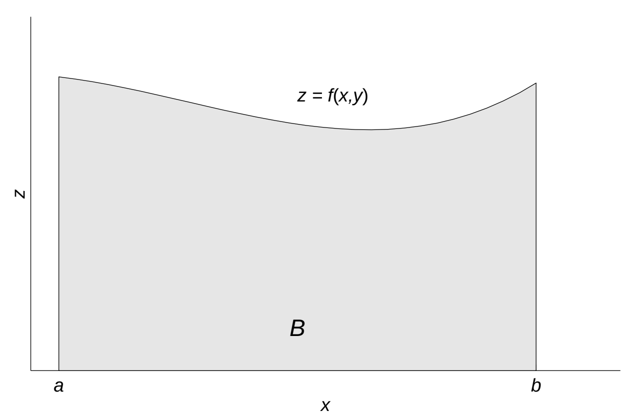
där

$$G(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

[1] För att man skall kunna strängt bevisa att formlerna (7.1) och (7.2) anger volymen, måste man förstås först och främst ha bestämt sig för en definition av volym för en kropp sådan som $K$.




**Figur 14.** Uppdelning av kroppen $K$ i tunna, plana skivor $K_k$.




**Figur 15.** En av de plana sidoytorna hos $K_k$.

Då $h \to 0$ konvergerar uttrycket (7.4) mot

$$\int_c^d G(y)\,dy.$$

(Se Följdsats 4, kap. 10 i [D], Sats 5.6.1 i [F].) Insättning av uttrycket för $G(y)$ ger (7.1).

Givetvis hade vi lika väl kunnat sönderdela kroppen i skivor parallella med planet $x = 0$, d.v.s. i skivor av formen $x_k \le x \le x_{k+l}, (x, y, z) \in K$. Om vi bildar motsvarande approximativa uttryck för summan av dessa skivors volymer, så får vi

$$h \sum_1^N \int_c^d f(x_k, y)\,dy,$$

och då vi låter $h \to 0$, får vi på samma sätt den upprepade integralen (7.2).

**Övning 7.2.** Beräkna de upprepade integralerna

$$\int_1^2 \left( \int_0^1 f(x, y)\,dx \right) dy \quad \text{och} \quad \int_0^1 \left( \int_1^2 f(x, y)\,dy \right) dx$$

för var och en av funktionerna

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y$

b) $f(x, y) = e^{x-2y}$

c) $f(x, y) = e^{xy}$.

**Övning 7.3.** Sätt

$$D = \big\{(x, y);\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\big\}.$$

Beräkna volymen av kroppen

$$K = \big\{(x, y, z);\ (x, y) \in D, 0 \le z \le f(x, y)\big\},$$

då $f(x, y)$ är given genom

a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 + xy}$.

> **Ledning.** *Integralen* $\int_0^2 x^{-1}\big((1 + x)^{\frac{3}{2}}\big)dx$ *kan man beräkna genom substitutionen* $\sqrt{1 + x} = t$.

c) $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1 + xy)^3}$.

## 7.2 Upprepad integral över icke-rektangulärt område

Antag att vi vill beräkna volymen av kroppen

$$L = \{(x, y, z);\ (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

där $D$ är området

$$D = \{(x, y);\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y\}. \tag{7.5}$$

Skillnaden mellan detta problem och det som betraktades ovan är att kroppens basyta ej längre är rektangulär.

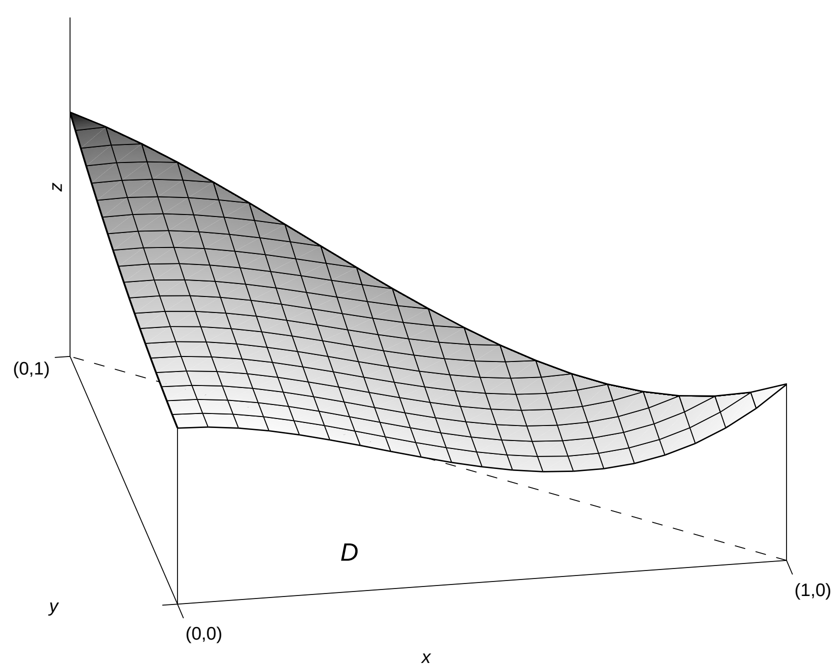
Volymen av $L$ är denna gång lika med den upprepade integralen

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{7.6}$$

Observera att i denna formel den inre integralens ena gräns beror på $y$. Detta bereder emellertid ingen ökad svårighet vid beräkningen, ty som förut i formel (7.1) blir den inre integralen en funktion av $y$, i detta fall

$$\int_0^{1-y} f(x, y)\, dx.$$

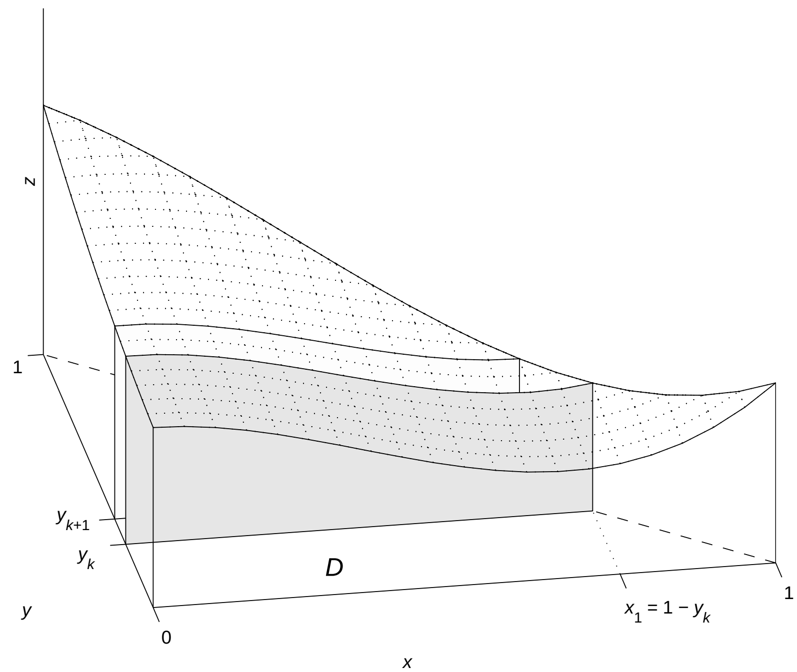
Vid beräkningen av den yttre integralen har man blott att integrera denna funktion från 0 till 1. Observera till sist att gränserna för integralerna med avseende på $y$




**Figur 16.** Kroppen $L$ (triangulär basyta).

respektive $x$ i (7.6) överensstämmer med gränserna för $y$ respektive $x$ i uttrycket (7.5) för området $D$.

För att motivera formeln (7.6) kan vi resonera på samma sätt som förut. Låt $L_1, \ldots, L_N$ vara en uppdelning av kroppen i tunna skivor av tjockleken $h$ parallella med planet $y = 0$. Betrakta den skiva $L_k$ som ligger mellan planen $y = y_k$ och $y = y_{k+1}$. En av sidoytorna, av skivan $L_k$ är avbildad i figur 18. *Observera att*




**Figur 17.** Uppdelning av kroppen $L$ i tunna, plana skivor $L_k$.

*läget av begränsningslinjen* $x = x_1 = 1 - y_k$ *beror på* $y_k$. Volymen av $L_k$ är alltså approximativt lika med

$$h \int_0^{1-y_k} f(x, y_k)\, dx,$$

och volymen av hela kroppen $L$ approximativt

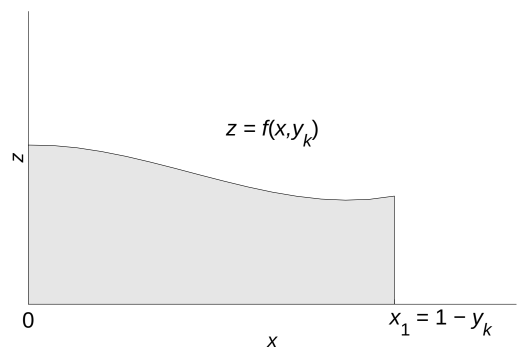
$$\sum_1^N h \int_0^{1-y_k} f(x, y_k)\, dx.$$

Observera att detta kan skrivas

$$h \sum_1^N G(y_k), \tag{7.7}$$

där

$$G(y) = \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx.$$




**Figur 18.** En av de plana sidoytorna hos $L_k$.

Men (7.7) är ett närmevärde för integralen

$$\int_0^1 G(y)\,dy \tag{7.8}$$

och konvergerar mot denna då $h \to 0$. Om vi till sist sätter in uttrycket på $G(y)$ i (7.8), så övergår denna formel i den upprepade integralen (7.6). Volymen av $L$ kan även uttryckas med en upprepad integral, i vilken integrationen sker först med avseende på $y$, sedan med avseende på $x$, nämligen

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{7.9}$$

Gränserna för de olika integralerna är här erhållna på följande sätt. Området $D$, d.v.s. basytan för kroppen $L$, kan skrivas så

$$D = \big\{(x,y);\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\big\}.$$

(Verifiera detta!) Gränserna i olikheterna för $x$ respektive $y$ ovan är gränserna för integrationen med avseende på $x$ respektive $y$ i (7.9).

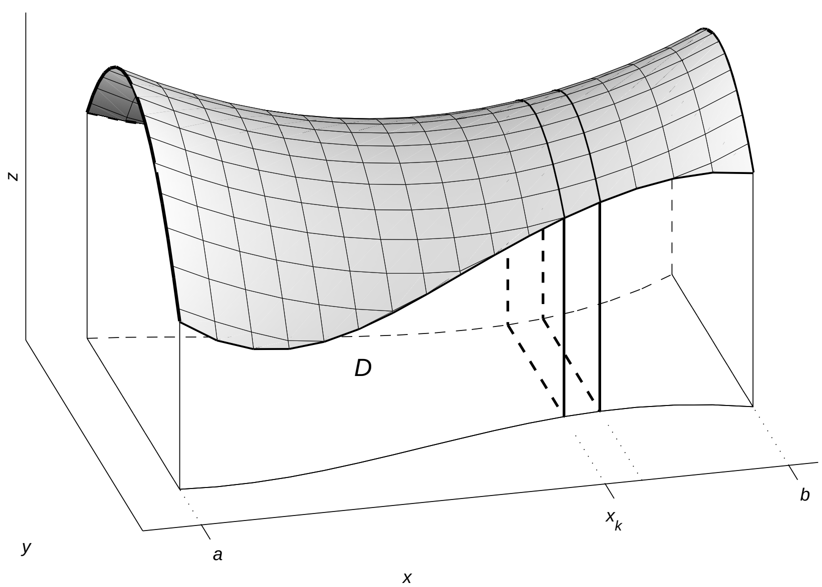
**Övning 7.4.** Uttrycket (7.9) för volymen av $L$ kan härledas med precis samma resonemang som uttrycket (7.6), med den skillnaden att man denna gång delar upp kroppen $L$ i skivor parallella med planet $x = 0$. Skriv själv upp detaljerna i resonemanget.

Vi betraktar till sist en något allmännare situation. Låt $y = \psi(x)$ och $y = \phi(x)$, $a \le x \le b$, vara två kontinuerliga kurvstycken. Antag att $\phi(x) < \psi(x)$ för alla $x \in [a,b]$. Låt $D$ vara området (se figur 19a–b)

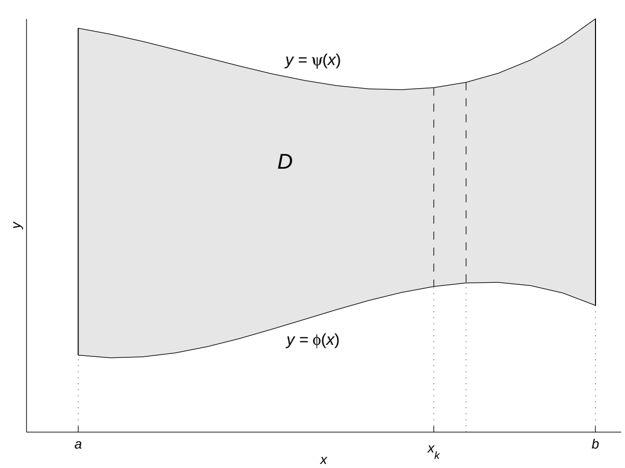
$$D = \big\{(x,y);\ a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\big\}. \tag{7.10}$$

Antag att $f(x,y)$ är kontinuerlig i $D$ och $\ge 0$ där. Vi söker volymen av kroppen

$$M = \big\{(x,y,z);\ (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\big\}.$$




**Figur 19a.** Kroppen $L$. Basytan är mängden
$$D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$




**Figur 19b.** Basytan i föregående figur avbildad i $xy$-planet.

Genom samma resonemang som ovan finner vi att volymen måste vara

$$\int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{7.11}$$

Analogt, om

$$D = \big\{ (x,y);\ c \le y \le d, \phi(y) \le x \le \psi(y) \big\}, \tag{7.12}$$

så ges volymen av

$$\int_c^d \left( \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

**Övning 7.5.** Genomför detaljerna i härledningen av uttrycket (7.11).

**Övning 7.6.**

a) Sätt

$$D = \left\{ (x,y);\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2} \right\}$$

och

$$K = \big\{ (x,y,z);\ (x,y) \in D, 0 \le z \le x + 2y \big\}.$$

Beräkna volymen av $K$.

b) Samma fråga då

$$D = \left\{ (x,y);\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{1 - (x/2)^2} \right\}$$

och $K$ är som i a).

c) Samma fråga då

$$D = \big\{ (x,y);\ x \ge 0, y \ge 0, x^2 + 4y^2 \le 4 \big\}$$

och $K$ är som i a).

**Övning 7.7.** Verifiera att

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} \tag{7.13}$$

kan skrivas

$$\sum_{n=1}^{3} \sum_{m=1}^{5-n} a_{nm}.$$

Sätt ut gränser för summationerna, så att uttrycket

$$\sum_{m=} \sum_{n=} a_{mn}$$

likaledes får värdet (7.13).

**Övning 7.8.** Beräkna volymen av kroppen

$$K = \big\{(x, y, z);\ (x, y) \in D, 0 \le z \le 1 + xy\big\},\ \text{då}$$

a) $D = \big\{(x, y);\ 0 \le x \le 1, x \le y \le 3 - x\big\}$.

b) $D = \big\{(x, y);\ x \ge 0, x \le y \le 4 - x\big\}$.

c) $D = \big\{(x, y);\ y \ge 0, x - 2y \ge 0, 3 - x - y \ge 0\big\}$.

## 7.3 Definition av dubbelintegral

Man definierar dubbelintegralen av en begränsad funktion $f(x, y)$ över ett begränsat område $D \subset \mathbb{R}^2$ genom en process som är analog med definitionen av Riemannintegral för funktioner av en variabel. Vi antyder blott här hur detta går till. Antag då först att $D$ är en rektangel. Betrakta en indelning av $D$ i disjunkta delområden $D_1, \ldots, D_N$, där alla $D$ även är rektanglar. Vi har således $D = \bigcup_{k=1}^{N} D_k$. Låt $M_k$ och $m_k$ beteckna supremum respektive infimum av $f(x, y)$ över $D_k$ (största respektive minsta värdet om sådant finns). Låt $Y_k$ vara ytan av rektangeln $D_k$. Sätt

$$\ddot{O} = \inf\left\{\sum_{k=1}^{N} M_k Y_k;\ \text{alla indelningar av } D\right\},$$

och

$$U = \sup\left\{\sum_{k=1}^{N} m_k Y_k;\ \text{alla indelningar av } D\right\}.$$

Här skall supremum och infimum tas över alla indelningar av $D$ i ändligt många delrektanglar. Eftersom $m_k \le M_k$, så är alltid $U \le \ddot{O}$. Om $U = \ddot{O}$, så säges $f$ vara Riemannintegrerbar över D, och det gemensamma värdet $U = \ddot{O}$ kallas för *dubbelintegralen* (i Riemanns mening) över $D$, och tecknas

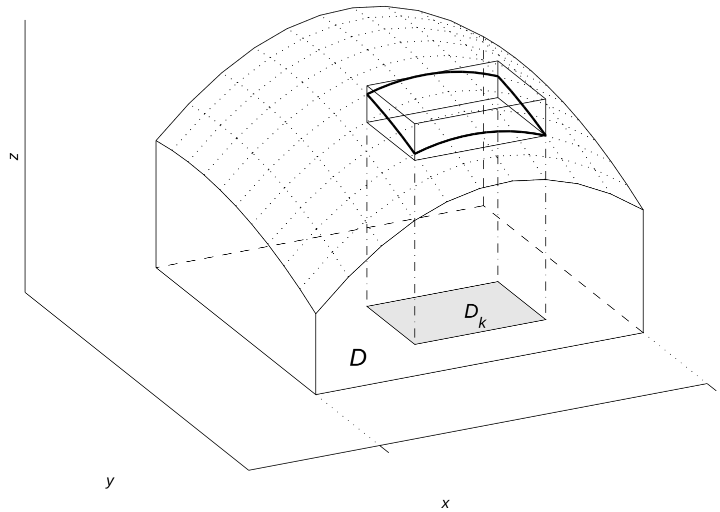
$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{eller} \quad \iint\limits_D f\, dx\, dy. \tag{7.14}$$

Om $D$ inte skulle vara en rektangel utan något annat begränsat område med hygglig rand (närmare bestämt: randen får bestå av ändligt många deriverbara kurvstycken av typ $y = \phi(x)$ eller $x = \psi(y)$), så definierar man integralen av $f$ över $D$ som

$$\iint\limits_{D_0} F(x, y)\, dx\, dy$$

där $D_0$ är någon stor rektangel som omfattar $D$, och $F$ är definierad i $D_0$ genom

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } (x, y) \in D \\ 0 & \text{om } (x, y) \notin D. \end{cases}$$




**Figur 20.** Illustration av definitionen av dubbelintegral.

Man kan nu lätt bevisa att varje kontinuerlig funktion är Riemannintegrerbar, och vidare att varje funktion, som är kontinuerlig överallt utom på ändligt många deriverbara kurvstycken, är Riemannintegrerbar. Vidare kan man visa att för Riemannintegrerbara funktioner dubbelintegralen har samma värde som motsvarande upprepade integral. Detta är viktigt, ty det är på så sätt som vi kan beräkna värdet av en dubbelintegral (7.14) för givet $f$ och $D$. Närmare bestämt, om $D$ är rektangeln $\big\{(x, y);\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\big\}$, så är dubbelintegralen av $f$ över $D$ lika med de bägge upprepade integralerna (7.1) och (7.2). Om $D$ är området (7.10), så är dubbelintegralen över $D$ lika med den upprepade integralen (7.11).

Om området $D$ varken är av formen (7.10) eller (7.12) så kan man ofta skriva $D$ som en union av områden som var för sig är av denna typ. Man har då användning av att om $D_1$ och $D_2$ är disjunkta områden (eller områden med blott någon del av randen gemensam), så gäller

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f\,dx\,dy.$$

Vidare kan man visa, att om $f$ och $g$ är Riemannintegrerbara funktioner, och $a$ och $b$ är reella tal, så gäller

$$\iint\limits_{D} (af + bg)\,dx\,dy = a \iint\limits_{D} f\,dx + b \iint\limits_{D} g\,dx.$$

Det är ganska lätt att visa att volymen av kroppen

$$K = \big\{(x, y, z);\ (x, y) \in D;\ 0 \leq z \leq f(x, y)\big\}$$

är lika med dubbelintegralen $\iint_D f\,dx\,dy$ om $D$ är ett område med hygglig rand såsom ovan och $f$ är Riemannintegrerbar och $\geq 0$. Ty om $V$ är volymen av $K$, så måste uppenbarligen gälla att

$$\sum m_k Y_k \leq V \leq \sum M_k Y_k$$

för varje indelning $D$ (och varje rimlig definition av volymen), och följaktligen $V \leq K \leq \ddot{O}$. Om $f$ är Riemannintegrerbar, t.ex. kontinuerlig, så är $V = \ddot{O} = \iint_D f\,dx\,dy$ och alltså $\iint_D f\,dx\,dy = V$. Om vi kombinerar detta med den nyssnämnda satsen att värdet av dubbelintegralen är lika med var och en av de upprepade integralerna, så får man ett bevis för våra påståenden i början av detta kapitel att volymen är lika med värdet av de upprepade integralerna.

# Kapitel 8

# Variabelsubstitution i dubbelintegral

Vid beräkning av en enkelintegral

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.1}$$

är det som bekant ibland fördelaktigt att göra en *variabelsubstitution.* Exempelvis övergår ju integralen $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ genom substitutionen $x = \sin\theta$ i integralen $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$. Allmännare, om vi gör substitutionen $x = h(t)$ i integralen (8.1), så övergår denna i

$$\int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)\,dt, \tag{8.2}$$

där $\alpha$ och $\beta$ är bestämda genom $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$. Här förutsätts att $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$, och att $h$ är kontinuerligt deriverbar på $[\alpha, \beta]$. (Se kap. 5.4 i [D], 5.3 i [F].)

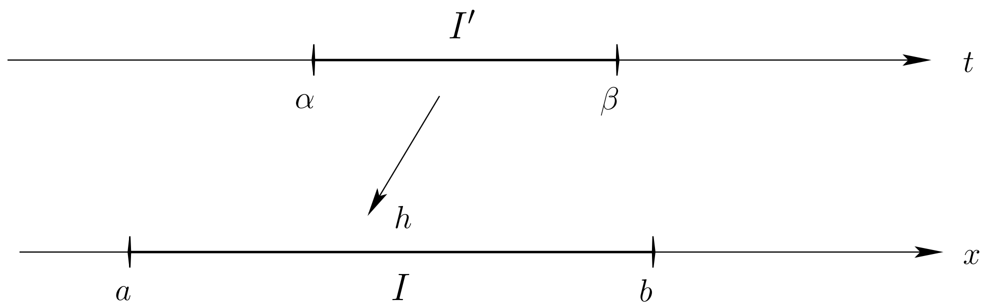
Det är ofta praktiskt att uppfatta $h$ som en *avbildning* från intervallet $[\alpha, \beta] = I'$ till $[a, b] = I$. Vi kan anta att $h$ är strängt monoton, ty man brukar blott använda sig av substitutioner med denna egenskap. Då är $h$ omvändbar, d.v.s. $h$ har invers. I så fall gäller, om vi sätter $I = [a, b]$ och $I' = [\alpha, \beta]$, att

$$I = \{x;\ x = h(t), t \in I'\}, \tag{8.3}$$

vilket även ofta skrivs $I = h(I')$. Med andra ord, $I$ är bilden av $I'$ under $h$. Om vi betecknar den inversa funktionen till $h$ med $h^{-1}$, så kan vi även skriva $I' = h^{-1}(I)$.

**Övning 8.1.** Om $I = [a, b]$, där $a < b$, så använder man ofta beteckningen $\int_I f(x)\,dx$ i stället för $\int_a^b f(x)\,dx$. Antag som ovan att $h$ är strängt monoton och deriverbar och att $h(I') = I$. Visa att formeln för variabelsubstitution kan skrivas

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{I'} f(h(t))|h'(t)|\,dt. \tag{8.4}$$




**Figur 21.** Tolkning av variabelsubstitutionen $x = h(t)$ som avbildning.

**Ledning.** *Om $h$ är växande så är $h'(t) > 0$ och således $|h'(t)| = h'(t)$, och* (8.4) *är därför blott ett annat sätt att skriva att* (8.1) *är lika med* (8.2). *Tänk själv igenom att* (8.4) *är riktig även i fallet att $h$ är avtagande.*

**Övning 8.2.** Visa att

$$\int_I \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \int_{I'} \frac{2t^2}{1+t^4}dt$$

om $I = [0,4]$ och $I' = [0,2]$.

Även vid dubbelintegraler är det ofta praktiskt att införa nya integrationsvariabler genom en substitution. Såväl integrationsområdets form som integrandens utseende kan vara avgörande för vilken substitution som är lämplig.

Vi börjar med att betrakta några enkla exempel. Vi vill beräkna dubbelintegralen

$$\iint\limits_D [(x+1)^2 + (y+2)^2]\, dxdy, \tag{8.5}$$

där

$$D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}. \tag{8.6}$$

Vi önskar förenkla integranden genom att göra substitutionen

$$\begin{cases} x + 1 = u & (8.7a) \\ y + 2 = v. & (8.7b) \end{cases}$$

I detta fall kan man härleda den transformerade integralens utseende genom upprepad substitution i enkelintegraler på följande sätt. Dubbelintegralen (8.5) är ju lika med den upprepade integralen

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 [(x+1)^2 + (y+2)^2] dx \right) dy. \tag{8.8}$$

Om vi i den *inre* integralen (d.v.s. integralen med avseende på $x$) gör substitutionen (8.7a) (obs. att $y$ hålls fix!), så övergår denna i

$$\int_1^2 [u^2 + (y+2)^2]\, du$$

(verifiera detta!). Om vi därefter gör substitutionen (8.7b) i den yttre integralen, så övergår hela uttrycket (8.8) i

$$\int_2^3 \left( \int_1^2 (u^2 + v^2)\, du \right) dv. \tag{8.9}$$

(Ty $\int_0^1 g(y+2)\, dy = \int_2^3 g(v)\, dv$; i detta fall är $g(y) = \int_1^2 [u^2 + (y+2)^2]\, du$.) Men (8.9) är ju detsamma som

$$\iint\limits_{D'} (u^2 + v^2)\, du\, dv., \tag{8.10}$$

där $D' = \{(u, v);\ 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3\}$.

Observera att sambandet mellan $D$ och $D'$ kan uttryckas mer koncist om man inför ett namn på den avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som definieras av variabelsubstitutionen. Om vi nämligen låter $\Phi$ vara funktionen

$$\Phi : (u, v) \mapsto (x, y),$$

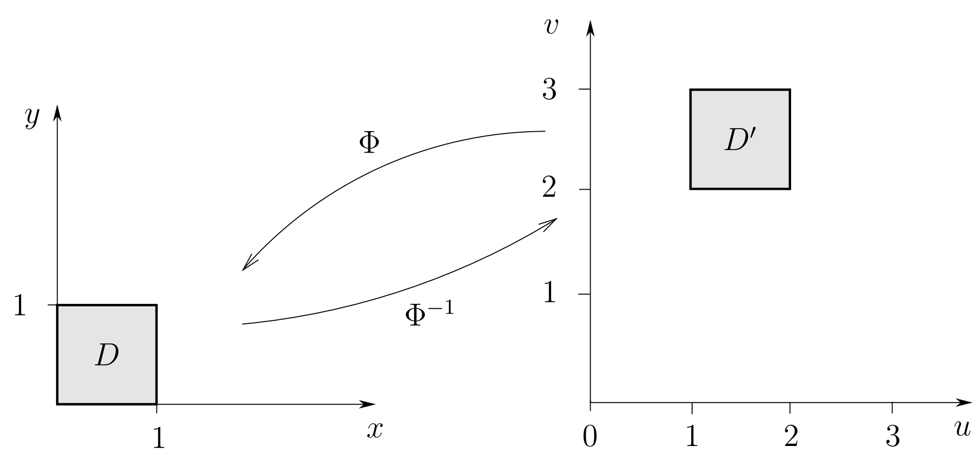
där $x = u - 1$, $y = v - 2$, så kan vi skriva

$$D = \Phi(D').$$

Eftersom $\Phi$ är omvändbar, d.v.s. har en invers, som vi betecknar $\Phi^{-1}$, så kan vi även skriva

$$D' = \Phi^{-1}(D).$$

Avbildningen $\Phi^{-1}$ kan ju skrivas $(x, y) \mapsto (u, v)$, där $u = x + 1$, $v = y + 2$.




**Figur 22.** Tolkning av variabelsubstitutionen $(x, y) = \Phi(u, v)$ som avbildning.

**Övning 8.3.** Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion på rektangeln $D$ som definieras av (8.6), och låt $p$ och $q$ vara reella tal. Visa genom att resonera som i exemplet ovan att

$$\iint_D f(x+p, y+q)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(u,v)\,du\,dv,$$

där $D' = \{(u,v);\ p \le u \le p+1, q \le v \le q+1\}$.

**Övning 8.4.** Visa följande påstående, som innehåller både Övning 8.3 och exemplet ovan som specialfall. Antag att $h$ och $k$ är kontinuerligt deriverbara och strängt växande funktioner, vilkas värdeförråd omfattar $[a,b]$ respektive $[c,d]$. Antag att $f$ är en kontinuerlig funktion på rektangeln

$$D = \{(x,y);\ a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Visa att dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

genom substitutionen $x = h(u)$, $y = k(v)$, övergår i

$$\iint_{D'} f(h(u),k(v))h'(u)k'(v)\,du\,dv,$$

där $D' = \{(u,v); \alpha \le u \le \beta, \gamma \le v \le \delta\}$, varvid $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ är givna genom $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$, $k(\gamma) = c$, $k(\delta) = d$. (Mer koncist uttryckt: $D' = \Phi^{-1}(D)$, där $\Phi$ är avbildningen $(u,v) \mapsto (h(u),k(v))$.)

Emellertid är de variabelsubstitutioner som är av störst intresse av formen $x = h(u,v)$, $y = k(u,v)$, där $h$ och $k$ beror *både* på $u$ och $v$. De hittills studerade substitutionerna var alla mycket speciella därigenom att $h$ berodde blott på $u$ och $k$ berodde blott på $v$. I det allmänna fallet gäller en formel[1] som är lätt att tillämpa, men tämligen svår att bevisa. Här skall vi blott utan bevis ange hur formeln lyder i två viktiga specialfall.

[1] I det allmänna fallet lyder formeln så: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(h(u,v),k(u,v))\left|\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial k}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial k}{\partial u}\right|\,du\,dv$, där $D'$ är bilden av $D$ under avbildningen $(x,y) \mapsto (u,v)$. Uttrycket mellan beloppstecknen kallas för funktionaldeterminanten för avbildningen $(u,v) \mapsto (x,y)$. Se vidare fortsättningskursen. (Domar m.fl. Analys 2, band 2, kap. 5.3.)

## 8.1 Affin substitution.

Vi skall först behandla substitutionen

$$\begin{cases} x = Au + Bv + E \\ y = Cu + Dv + F. \end{cases} \tag{8.11}$$

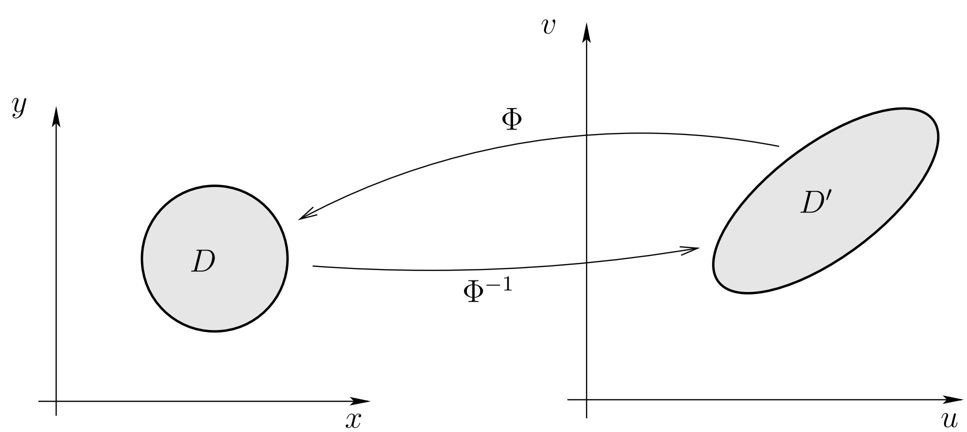
Den avbildning $(u, v) \mapsto (x, y)$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som definieras av dessa ekvationer kallas för en *affin* avbildning. Om $E = F = 0$ kallas avbildningen *lineär*. Vi skall anta att konstanterna $A$, $B$, $C$, $D$ uppfyller villkoret

$$AD - BC \neq 0. \tag{8.12}$$

(Observera att $AD - BC$ är determinanten för matrisen $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$.) Låt oss kalla avbildningen $(u, v) \mapsto (x, y)$ för $\Phi$. Om villkoret (8.12) är uppfyllt, så är det lätt att se att avbildningen $\Phi$ är omvändbar. Ty om (8.12) gäller, så kan man ur ekvationerna (8.11) lösa $u$ och $v$ uttryckt i $x$ och $y$, varvid man erhåller

$$\begin{cases} u = \frac{Dx - By + BF - DE}{AD - BC} \\ v = \frac{-Cx + Ay + CE - AF}{AD - BC}. \end{cases}$$

Å andra sidan är det också lätt att visa att $\Phi$ icke är omvändbar, om (8.12) icke gäller. Vi hänvisar på denna punkt till kursen i lineär algebra (se t.ex. [KL] kap. 11.3).




**Figur 23.** Tolkning av variabelsubstitutionen $(x, y) = \Phi(u, v)$ som avbildning, forts.: områdena $D$ och $D' = \Phi^{-1}(D)$.

Låt nu $D$ vara ett givet område och sätt $D' = \Phi^{-1}(D)$, d.v.s.

$$D' = \{(u, v); (x, y) \in D\},$$

där $(x, y)$ och $(u, v)$ är förbundna genom (8.11). Låt $f$ vara en godtycklig Riemannintegrerbar funktion, t.ex. en kontinuerlig funktion. Då gäller:

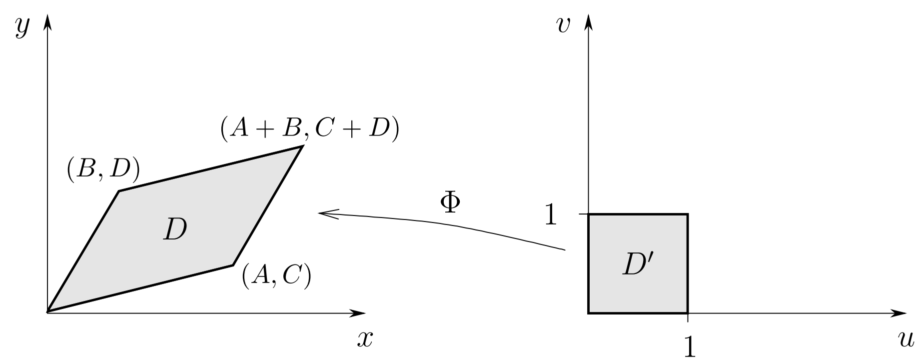
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \iint\limits_{D'} f(Au+Bv+E, Cu+DV+F)|AD-BC|\,du\,dv. \tag{8.13}$$

Observera faktorn $|AD-BC|$ som här kan sägas motsvara $|h'(t)|$ i formel (8.4).

Vi bevisar inte formeln (8.13) här. För förståelsen av formeln är det av stort intresse att betrakta det fall att $f(x,y)$ är identiskt lika med 1. Då betyder $\iint_D f\,dx\,dy$ arean av området $D$. Formeln (8.13) säger alltså i detta fall att arean av $D$ är lika med arean av $D'$ multiplicerad med $|AD-BC|$. Om vi ytterligare antar att $D$ är en rektangel, så är det ganska lätt att övertyga sig om att det nyssnämnda sambandet gäller (se Övning 8.5).

Observera att formeln (8.13) omfattar specialfallet $x = u+E$, $y = v+F$ (jfr Övning 8.4). I detta fall kallas avbildningen $(u,v) \mapsto (x,y)$ för en *translation.*

**Övning 8.5.** Låt $D'$ vara kvadraten $\{(u,v);\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$. Verifiera att avbildningen $(u,v) \mapsto (x,y)$, där $x = Au+Bv$, $y = Cu+Dv$, avbildar $D'$ på parallellogrammen med hörn i $(0,0)$, $(A,C)$, $(A+B, C+D)$ och $(B,D)$. Visa att arean av denna parallellogram är $|AD-BC|$.




**Figur 24.** Affin transformation (Övning 8.5).

**Exempel 8.1.** Beräkna $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, där $D$ är parallellogrammen med hörnen i $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,2)$ och $(1,1)$ genom att göra substitutionen $x = 2u+v$, $y = u+v$.

**Lösning.** Genom att lösa $u$ och $v$ uttryckt i $x$ och $y$ får man $u = x-y$ och $v = 2y-x$. Härav ser man att området $D$ avbildas på kvadraten $D'$ med hörnen i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$ i $uv$-planet. Faktorn $|AD-BC|$ antar värdet 1. Integralen övergår således i

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 [(2u+v)^2 + (u+v)^2] du \right) dv = \int_0^1 \left( \int_0^1 (5u^2+6uv+2v^2) du \right) dv$$
$$= \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{23}{6}.$$

**Övning 8.6.** Beräkna $\iint_D (x + 2y + 1)\, dx\, dy$, där $D$ är parallellogrammen med hörnen i $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$ och $(-1, 2)$ genom att göra substitutionen $x = 3u - v$, $y = u + 2v$.

## 8.2 Polär substitution

Till sist skall vi behandla substitutionen

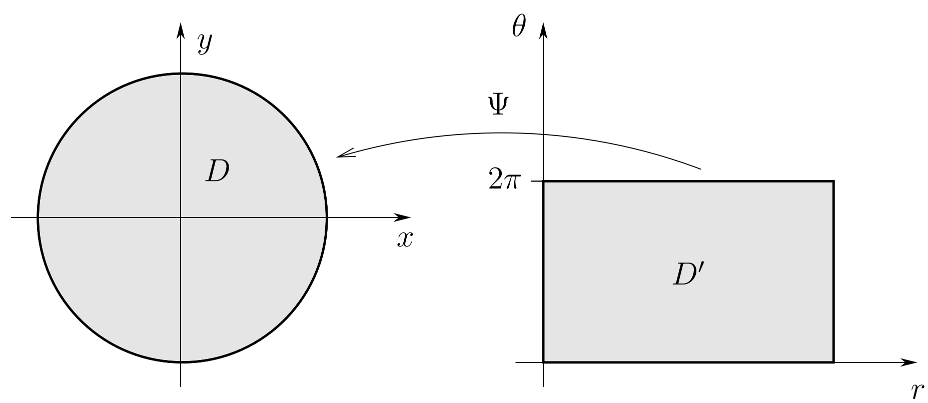
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{8.14}$$

Ekvationerna (8.14) definierar en avbildning $\Psi : (r, \theta) \mapsto (x, y)$, från $\{(r, \theta);\ r \geq 0\}$ till $\mathbb{R}^2$, men denna är inte omvändbar, eftersom $(r, \theta)$ och $(r, \theta + 2\pi)$ avbildas på samma punkt, och eftersom $(0, \theta)$ avbildas på $(0, 0)$ för varje $\theta$. Vi låter därför definitionsområdet för $\Psi$ vara

$$D_\Psi = \{(r, \theta);\ r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Då är $\Psi$ en omvändbar avbildning från $D_\Psi$ till

$$V_\Psi = \{(x, y);\ (x, y) \neq (0, 0)\}.$$



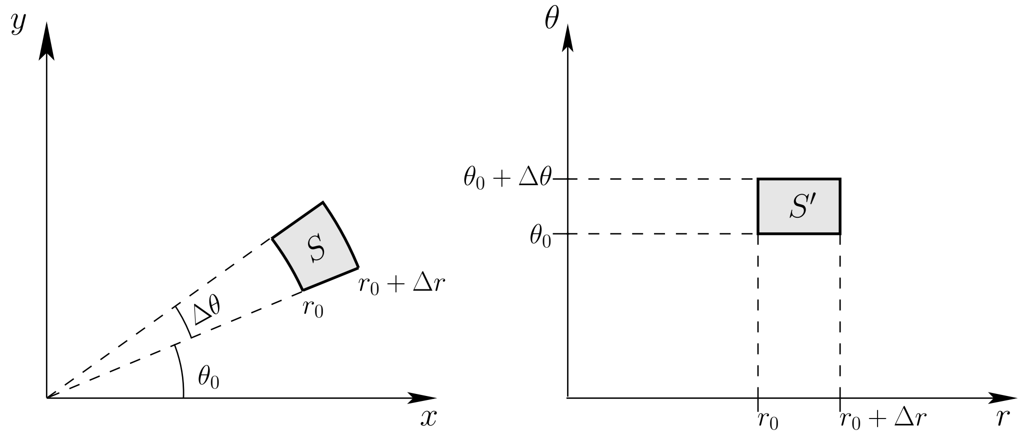

**Figur 25.** Polär substitution: tolkning av $\Psi : (r, \theta) \mapsto (x, y)$ som avbildning.

Ty om $(x, y) \neq (0, 0)$, så finns alltid ett entydigt bestämt $(r, \theta) \in D_\Psi$ så att (8.14) gäller (verifiera detta!). Som vanligt låter vi $D$ vara ett område i $xy$-planet, och sätter $D' = \Psi^{-1}(D)$. Då gäller formeln

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta \tag{8.15}$$

I detta fall träder alltså faktorn $r$ i stället för $|AD - BC|$.

Man förstår lättast formeln om man betraktar fallet att $f(x, y)$ är identiskt lika med 1 och $D$ är ett litet stycke av en cirkelsektor $S$ såsom i figur 26. Vänstra ledet




**Figur 26.** Polär substitution: intuitiv förklaring av formel (8.15).

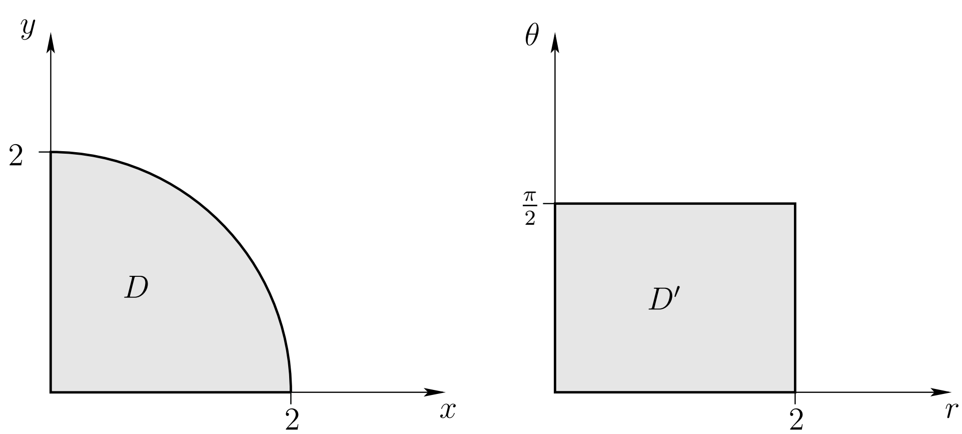
av (8.15) betyder då arean av $S$, vilken är approximativt lika med $r_0 \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$. Högra ledet av (8.15) är dubbelintegralen av funktionen $r$ över rektangeln $S'$, men eftersom $r$ är ungefär lika med $r_0$ i hela $S'$, så är detta approximativt lika med $r_0$ multiplicerad med arean av $S'$, alltså likaledes $r_0 \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$.

**Exempel 8.2.** Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

där $D$ är kvadranten

$$D = \{(x, y);\ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$




**Figur 27.** Illustration till Exempel 8.2.

**Lösning.** Sätt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Mot området $D$ svarar området

$$D' = \{(r, \theta);\ 0 < r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

i $r\theta$-planet. Eftersom $x^2 + y^2 = r^2$, så övergår den givna integralen enligt formel (8.15) i

$$\iint_{D'} r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^2 r^3 \, dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^4}{4} = 2\pi.$$

**Övning 8.7.** Beräkna integralerna

a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y);\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) $\iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y); y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

c) $\iint_D y\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, där $D$ är som i exempel b).

d) $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y);\ x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

# Bilaga A

# Svar till övningsuppgifterna

## Kapitel 2

2.1. $(x_1, x_2) = t\left(1, -\dfrac{a}{b}\right) + \left(0, \dfrac{c}{b}\right), \quad b \neq 0$

$(x_1, x_2) = s\left(-\dfrac{b}{a}, 1\right) + \left(\dfrac{c}{a}, 0\right), \quad a \neq 0$

2.2. $(x, y, z) = t(-2, 1, 2) + (1, 2, 3)$

2.3. $x + 2y - z + 1 = 0.$

## Kapitel 3

3.3. a) Maximum $= 1$ i $(0, 0)$.

b) Funktionen har varken maximum eller minimum.

c) Funktionen i 3.2 a) har varken maximum eller minimum; funktionen i 3.2 b) har minimum $= 1$ i varje punkt på kurvan $x = y^2$; funktionen i 3.2 d) har maximum $= \frac{1}{2}$ i varje punkt på linjen $x = y$ (utom $(0, 0)$), och minimum $= -\frac{1}{2}$ i varje punkt på linjen $x = -y$ (utom $(0, 0)$).

3.9. a) 1 b) 0 c) existerar ej d) 0.

3.12. a) och d) är kontinuerliga i $(0, 0)$.

3.17. a) ej kontinuerlig i $(1, x)$, $x \neq 1$. b) kontinuerlig överallt.

## Kapitel 4

4.1. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 4xy^2, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 4x^2 y$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(2x + y + 3y^2 + x^2 y + xy^2 + 3xy^3\right) e^{xy},$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x + 6xy + x^2y + x^3 + 3x^2y^2\right) e^{xy}$$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x + 3y^2)\exp(x^2 + 3xy^2)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln x \cdot x^y.$

4.2. a) $5e^3$ b) $-1$.

4.5. $D_{(0,1)}f(2,1) = 3$, $D_{(3,-1)}f(2,1) = 9$. $f$ växer snabbare i $(0,1)$-riktningen, ty $D_{\mathbf{w}}f(2,1) = \frac{9}{\sqrt{10}} < D_{(0,1)}f(2,1)$.

4.6. a) $12t^2$

b) $(4t + 2)e^{2t^2+2t}$

c) $-2\sin t\cos t$ $(= -\sin(2t))$

d) $108t$

e) $-\dfrac{(a^2 + b^2)t}{\left(1 + (a^2 + b^2)t^2\right)^{3/2}}$.

# Kapitel 5

5.2. $D_{\mathbf{w}}(2,1) = 4,\ 2,\ \sqrt{18},\ \sqrt{20}$ om $\mathbf{w} = (1,0),\ (0,1),\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ respektive.

5.3. $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -2)$; t ex $(1, x_0)$ är parallell med nivåkurvans tangent genom $(x_0, y_0)$.

# Kapitel 6

6.1. $f(0,0) = 1$ resp $g(3,0) = -3$.

6.2. $f$ har lokalt maximum i (0,2) och (3,0) och lokalt minimum i alla punkter på linjestycket $x = y$, $0 \le x \le \frac{6}{5}$. Dess största värde är 3, dess minsta 0.

6.3. a) Största värde 5, minsta värde $-3$

b) Största värde 10, minsta värde $-10$

c) Största värde $\frac{13}{4}$, minsta värde $\frac{7}{4}$

d) Största värde $\left(\sqrt{3} - 1\right)e^{\sqrt{3}-1}$, minsta värde 0

e) Största värde 64, minsta värde $-4$

f) Största värde 6, minsta värde 0.

6.4. a) Sök största och minsta värde för $g(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$ och för $h(y)$ på $c \leq y \leq d$. Om $g(x)$ respektive $h(y)$ har största värde $K$ respektive $M$ i $x_0$ respektive $y_0$ och minsta värde $k$ respektive $m$ i $x_1$ respektive $y_1$, så har $F(x, y)$ största värde $K + M$ i $(x_0, y_0)$ och minsta värde $k + m$ i $(x_1, y_1)$.

b) Eftersom $f$ är monoton har $f\big(g(x) + h(y)\big)$ extrempunkter i samma punkter som $g(x) + h(y)$.

c) I varje område där $g(x)$ och $h(y)$ har konstant tecken kan man tillämpa analogt resonemang som i a).

# Kapitel 7

7.2. a) $\frac{1}{3}$ b) $(e-1)\dfrac{e^{-2} - e^{-4}}{2}$ c) $\dfrac{e^2 - 2e + 1}{2}$.

7.3. a) $\frac{4}{15}\big(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1\big)$

b) $\dfrac{4}{3}\left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3} - \ln\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\frac{1}{2}(\ln 3 - \frac{2}{3})$.

7.6. a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{8}{3}$.

7.8. a) $\frac{13}{4}$ b) $\frac{28}{3}$ c) $\frac{19}{8}$.

# Kapitel 8

8.6. 35.

8.7. a) $\frac{14}{3}\pi$ b) $4\pi$ c) 8 d) $\pi\sqrt{3}$.

# Litteraturförteckning


[D] Domar, Halliste, Wallin och Wik: *Analys 1, band 1 och 2.* Gleerups 1969.

[F] Frennemo, Löfström och Tobiasson: *Elementär analys i en dimension.* Almqvist och Wiksell 1974.

[KL] Kristoferson och Larfeldt: *Algebra och geometri.* Akademibokhandeln 1973.


## Litteratur om differential- och integralkalkyl för flera variabler

Det finns ett stort antal böcker i differential- och integralkalkyl för flera variabler. Några exempel:


Domar, Halliste, Wallin och Wik: *Analys 2, band 1 och 2.* Gleerups 1969.

Frennemo, Löfström och Tobiasson: *Elementär analys i flera dimensioner.* Almqvist och Wiksell 1974.

Lang, Serge: *A second course in calculus.* Addison-Wesley 1968.

Persson och Böiers: *Analys i flera variabler.* Studentlitteratur 1988.