Övningsuppgifter i Analys

(en variabel)

JAN BOMAN

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
2:a uppl. 1978

FÖRORD

Detta häfte är avsett att användas tillsammans med läroboken Courant-John, Introduction to Calculus and Analysis, vol. 1, kap 1-5. Förutom övningsuppgifter innehåller häftet ett antal lösta exempel för varje avsnitt i texten samt kommentarer till texten. Kommentarerna är avsedda för det första att hjälpa läsaren att strukturera innehållet i läroboken, t.ex. genom att framhålla viktiga begrepp och satser och genom att påpeka motiveringen - bl.a. ur fysikalisk synpunkt - till införandet av nya matematiska begrepp. För det andra avser kommentarerna att hjälpa läsaren att självständigt lösa övningsuppgifterna.

Häftets grundläggande filosofi är att betona differential- och integralkalkylens roll inom fysiken och andra tillämpningsområden. En sådan betoning innebär enligt min mening ingalunda att matematiken reduceras till en receptsamling för specifika kalkyler. Tvärtom, utnyttjande av matematiska metoder inom fysiken och andra tillämpningsämnen kräver god insikt om de matematiska begreppens innebörd och om de inre sammanhangen i den matematiska teorin. Detta häftes teoretiska ambitionsnivå är därför inte lägre än på traditionella universitetskurser i analys. Däremot har speciell omsorg ägnats åt att stimulera läsarens <u>intuitiva</u> begreppsförståelse. Denna ambition avspeglas både i kommentarerna och i urvalet av uppgifter - många tillämpningsuppgifter, särskilt geometriska och fysikaliska. God intuitiv begreppsförståelse tror jag är ett eftersträvansvärt mål inte blott för blivande fysiker utan för alla matematikstuderande.

De fysikaliska tillämpningsuppgifterna har författats i samarbete med Gunnar Edvinsson.

Kapitelangivelser hänvisar till Courant-John om inte annat sägs.

För att underlätta anknytningen till gymnasiets matematikkurs ges referenser till den oftast använda gymnasieläroboken i matematik, NE. Vidare förekommer hänvisningar till läroboken i mekanik, F.

Stockholm i juni 1978

Jan Boman

LITTERATURHÄNVISNINGAR

CJ R. Courant och F. John, Introduction to Calculus and Analys, Vol 1, Wiley 1965.

NE B. Nyman och G. Emanuelsson, Matematik för gymnasieskolan, N- och T-linjerna, del 1-3, Läromedelsförlagen 1969.

F T. Eriksson, T, Lagervall och O. Beckman, Fysik 1, (mekanik, värmelära). Almqvist och Wiksell 1970.

Mathematics presented as a closed, linearly ordered, system of truths without reference to origin and purpose has its charm and satisfies a philosofical need. But the attitude of introverted science is unsuitable for students who seek intellectual independence rather than indoctrination; disregard for applications and intuition leads to isolation and atrophy of mathematics.

Richard Courant och Fritz John
i Introduction to Calculus and Analysis

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

KAPITEL 1. INTRODUKTION (Analysens grundbegrepp)

Kap. 1.2 a,b. Definitionsmängd (domain) och värdemängd (range) för en funktion definieras på sidan 18 i CJ. Observera att när man anger en funktion måste man tala om dels vad definitionsmängden D_f är, dels hur funktionsvärdet är bestämt för varje punkt i D_f (t.ex. funktionen f definieras genom $f(x) = \sqrt{2-x^2}$, $D_f = [0,\sqrt{2}]$) . Oftast anges funktionsvärdena genom någon "formel" (kallas även "analytiskt uttryck"), såsom i det nyssnämnda exemplet. Man brukar då använda sig av konventionen att om ingenting sägs om D_f , så är D_f lika med mängden av alla reella tal för vilka det givna uttrycket är meningsfullt (jfr Nyman-Emanuelsson del 1, kap. 7.1, sid. 113).

Exempel 1. Funktionen $f(x)$ definieras genom $f(x) = \sqrt{2-x^2}$. Ange D_f .

Lösning. Enligt konventionen skall D_f består av alla x för vilka uttrycket $\sqrt{2-x^2}$ är meningsfullt. Men detta är precis de x för vilka $2 - x^2 \geq 0$, dvs $x^2 \leq 2$, dvs $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Vi får alltså $D_f = [-\sqrt{2} , \sqrt{2}]$,

Exempel 2. Funktionen $f(x)$ definieras genom $f(x) = x/(x^2 - 3)$. Ange D_f .

Lösning. Uttrycket är meningsfullt om nämnaren $x^2 - 3$ är skild från noll, annars ej. Alltså är $D_f = \{x \in R \; ; \; x \neq \sqrt{3}$ och $x \neq -\sqrt{3}\}$.

Övning 1. Ange D_f om $f(x)$ definieras genom

a) $f(x) = \sqrt{x+1}/x$

b) $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = x/\sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

e) $f(x) = e^{x^2-1}$

f) $f(x) = \log(x^2-1)$

g) $f(x) = 1/\sin x$

h) $f(x) = \log(\sin x)$.

Exempel 3. Låt $f(x) = 1 - 2x$ och $D_f = [1,2]$. Ange värdemängden V_f.

Lösning. Man ser lätt på funktionens graf (upprita denna!) att $V_f = [f(1),f(2)] = [-1,-3] = [-3,-1]$. Man kan också resonera så här. Enligt definitionen skall V_f bestå av precis de tal y för vilka ekvationen $1 - 2x = y$ har någon lösning x som tillhör D_f . Lösningen är $x = (1 - y)/2$. Men att $(1 - y)/2 \in D_f$ är detsamma som att

$1 \leq (1 - y)/2 \leq 2$ dvs $2 \leq 1 - y \leq 4$ dvs $y \leq -1$ och $y \geq -3$ dvs $-3 \leq y \leq -1$.

Exempel 4. Låt $f(x) = x^2$ och $D_f = [-1,2]$. Ange V_f .

Lösning. Upprita funktionens graf och markera D_f på x-axeln. Man ser lätt att det avsnitt av y-axeln som svarar mot x-värden i D_f är $V_f = [f(0),f(2)] = [0,4]$.

Övning 2. Ange V_f om $f(x)$ är definierad genom

a) $f(x) = 2x - 3$, $D_f = [1,4]$

b) $f(x) = |x|$, $D_f = [-2,3]$

c) $f(x) = x^2$, $D_f = [-1,2] \cup [3,4]$

d) $f(x) = \sqrt{2-x^2}$

e) $f(x) = 1/x$.

Övning 3. Ett snöre, som har längden 1 meter då det är obelastat, töjs 0.003x meter då det sträcks med kraften x N (newton). Vid belastning med 200N brister snöret. Mellan vilka gränser kan snörets längd variera?

Övning 4. En bil färdas på en landsväg med nord-sydlig sträckning under tidsintervallet $0 \leq t \leq 15$ minuter på så sätt att bilen vid tiden t befinner sig x km norr om en punkt P , där

$$x = 10 + \frac{t^2}{15}, \quad 0 \leq t \leq 15 .$$

Vilka punkter på vägen passeras av bilen?

Övning 5. Samma uppgift som i uppgift 4, fast sambandet mellan x och t är givet enligt formlerna

$$\begin{cases} x = 50 - \dfrac{t^2}{5} , & 0 \leq t \leq 5 \\ x = 55 - 2t , & 5 \leq t \leq 15 . \end{cases}$$

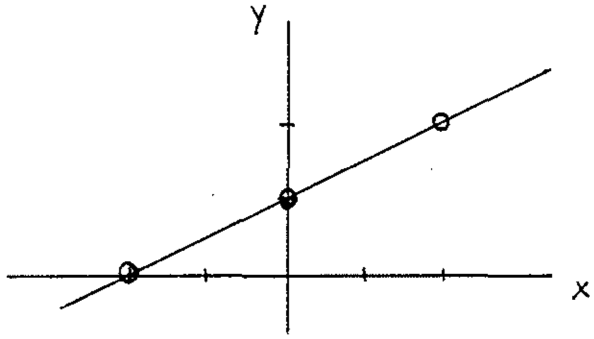
Övning 6. Vad är det för fel på följande försök till lösning av Exempel 4 ovan:

> V_f består av de tal y för vilka ekvationen $y = x^2$ har någon lösning x som tillhör $D_f = [-1,2]$. Lösningen är $x = \pm\sqrt{y}$. Vi söker alltså de y för vilka $-1 \leq \pm\sqrt{y} \leq 2$. Kvadrering ger $1 \leq y \leq 4$. Alltså $V_f = [1,4]$.

Såväl definitionsmängd som värdemängd för en funktion kan bestå av andra slags objekt än reella tal. Viktigt i mekaniken är det fall då värdemängden består av vektorer i R^2 eller R^3 (NE del 3, kap. 6.4, del 1 kap. 7.12; F sid. 45). Vi ger några exempel på detta.

Exempel 5. Sätt $f(t) = (2t, t+1)$ för $t \in R$. Funktionen f avbildar alltså $t \in D_f = R$ på vektorn $(2t, t+1) \in R^2$. Beräkna $f(-1)$, $f(0)$ och $f(1)$. Ange V_f.

Lösning. $f(-1) = (-2,0)$, $f(0) = (0,1)$, $f(1) = (2,2)$. Man ser efter insättning av ytterligare några t-värden att V_f måste utgöras av den oändligt långa räta linje varav en del är utritad i figuren.



Övning 7. Sätt $f(t) = (t, 2t-1)$, $D_f = [0,3]$. Beräkna $f(0)$ och $f(1)$. Ange V_f.

Övning 8. Sätt $f(t) = (t, t^2)$, $D_f = \{t; t \geq 0\}$. Beräkna $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$. Skissera V_f. Vad är V_f för en kurva?

Övning 9. Sätt $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $D_f = [0, 2\pi]$. Beräkna $f(0)$, $f(\pi/4)$, $f(\pi/2)$, $f(3\pi/4)$, $f(\pi)$ osv ända till $f(2\pi)$. Upprita V_f.

Kap. 1.2c. Det som i CJ (sid. 29) kallas monoton funktion brukar i de flesta böcker kallas strängt monoton funktion. I sådana fall avser man med exempelvis växande funktion en funktion f sådan att $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. En funktion som är konstant på ett intervall blir alltså växande enligt denna definition. Här skall vi använda denna sistnämnda terminologi. För att avgöra "analytiskt", dvs med hjälp av funktionsuttrycket, om en given funktion är monoton måste vi, innan bättre metoder är utvecklade, använda definitionen direkt. En enklare men inte fullt så stringent metod är att rita upp funktionens graf och avgöra vilka delar av denna som "sluttar" uppåt respektive nedåt.

Ofta har man användning av följande observationer

(1) Om $f(x)$ och $g(x)$ är växande (avtagande) så är $f(x) + g(x)$ växande (avtagande).

(2) Om $f(x)$ är växande (avtagande), så är $-f(x)$ avtagande (växande).

<u>Övning 10</u>. Om $f(x)$ är växande, vad kan då sägas om $1/f(x)$?

<u>Exempel 6</u>. Visa att $f(x) = x/(x+1)$ är avtagande för $x \geq 0$.

<u>Lösning</u>. $f(x_2) - f(x_1) =$

$$= \frac{x_2(x_1+1) - x_1(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1+1)(x_2+1)} .$$

Eftersom nämnaren i det sista uttrycket alltid är > 0 om x_1 och x_2 är ≥ 0 , så följer att $f(x_2) - f(x_1)$ måste vara > 0 om $x_2 - x_1 > 0$. Därmed är visat att f är växande, ja i själva verket strängt växande.

<u>Exempel 7</u>. Visa att funktionen $f(x) = x/(x^2 + 1)$, är växande för $0 \leq x \leq 1$ och avtagande för $x \geq 1$.

<u>Lösning</u>. Antag att $x_1 < x_2$. Vi får

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)\ (x_2^2+1)}$$

Faktorn $(x_2-x_1)/[(x_1^2+1)(x_2^2+1)]$ är positiv, varför $f(x_2) - f(x_1)$ har samma tecken som $1 - x_1x_2$. Men det är klart att

$$1 - x_1x_2 < 0 \ , \quad \text{om} \quad 1 \leq x_1 < x_2$$

och

$$1 - x_1x_2 > 0 \ , \quad \text{om} \quad 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$$

(tänk efter!). Därmed är påståendet visat. (Kontrollera resultatet genom att skissera funktionskurvan.)

<u>Övning 11</u>. Visa att funktionen $f(x) = x^2 - 8x$ är avtagande för $x \leq 4$ och växande för $x \geq 4$. Ledning: bilda uttrycket $f(x_2) - f(x_1)$ och bryt ut $x_2 - x_1$.

<u>Övning 12</u>. Visa att funktionen $f(x) = a^x$ är avtagande (på hela R) om $0 < a < 1$. (Förutsätt känt att $a^b < 1$ om $a < 1$ och $b > 0$.)

Övning 13. En bils rörelse beskrivs under tiden $0 \le t \le 10$ på följande sätt. Vid tiden t befinner sig bilen på en punkt rakt norr om en punkt P och på avståndet $2t + 3|t-4|$ från P. Under vilka tidsperioder rör sig bilen åt norr respektive söder? (Ledning: upprita grafen för funktionen $f(t) = 2t + 3|t-4|$.)

Övning 14. En fjällvandrare befinner sig vid tiden t minuter på en höjd av y meter över havet, där

$$y = 1000 + 50 \cos \frac{\pi t}{15} \quad \text{för} \quad 0 \le t \le 60.$$

Under vilka tidsintervall har vandraren uppförsbacke?

Ofta är det svårt att direkt med hjälp av formeluttrycket för en funktion avgöra om funktionen är växande eller avtagande. I många fall kan grafiska metoder vara användbara, såsom i följande exempel.

Övning 15. Antalet invånare i ett land anges approximativt av funktionen

$$y = f(t) = 10e^{0,03t} - 0,5t$$

för $0 \le t \le 50$, där tiden t är mätt i år och y i millioner invånare. Undersök genom att skissera funktionens graf under vilka tidsintervall som landets invånarantal är statt i växande respektive avtagande. (Använd gärna fickkalkylator för beräkning av funktionsvärdena.)

Jämna (even) och udda (odd) funktioner definieras på sidan 29 i CJ.

Exempel 8. Visa att funktionen $f(x) = \sin x$ är udda och att funktionen $g(x) = x \sin x$ är jämn.

Lösning. Enligt definitionen är f udda om det gäller att $f(-x) = f(x)$ för alla x. Vi vet att $\sin(-x) = -\sin x$ för alla x. Funktionen $\sin x$ är alltså udda. På analogt sätt inses att funktionen $g(x) = x \sin x$ är jämn, eftersom $g(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = g(x)$ för alla x.

Observera att de flesta funktioner är varken jämna eller udda, såsom t.ex. funktionen $f(x) = x + 1$. Å andra sidan är förstås funktionen som är identiskt lika med 0 <u>både</u> jämn och udda.

<u>Övning 16</u>. Avgör vilka av följande funktioner som är jämna respektive udda.

a) $f(x) = x \cos x$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3 - 4x$

d) $f(x) = e^x$

e) $f(x) = e^{x^2}$

f) $f(x) = x^3 + 1$

g) $f(x) = x^4 - 2|x|$

h) $f(x) = x|x|$

i) $f(x) = |3 - 2|x||$.

<u>Kap. 1.2d</u>. På sidan 31 förklaras i något oprecisa men intuitivt förståeliga termer vad som menas med att en funktion är kontinuerlig (jfr NE del 2, kap. 5.6) Lös nedanstående uppgifter med hjälp av det intuitiva kontinuitetsbegreppet. En funktion som inte är kontinuerlig kallas diskontinuerlig.

<u>Exempel 9</u>. Vilka av nedanstående funktioner är kontinuerliga på hela R ?

a) $f_1(x) = 2x - 3$

b) $f_1(x) = 1/1 + x^2$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{för } x \leq 0 \\ 2 & \text{för } x > 0 . \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{för } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{för } x > 0 . \end{cases}$

e) $f_5(x) = 1/x$ för $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

f) $f_6(x) = 2x - 3$ för $x \neq 2$, $f_6(2) = 3$.

<u>Lösning</u>. Funktionerna f_1 och f_2 är kontinuerliga, eftersom deras grafer består av ett enda sammanhängande stycke. Efter kontroll ser man att detsamma gäller funktionen f_3 , ty de bägge delarna av f_3:s graf hänger ihop i punkten (0,2) . Däremot är f_4 diskontinuerlig, eftersom de bägge delarna av grafen inte hänger ihop vid $x = 0$. Funktionen f_4 har ett <u>språng</u> (eng: jump) i $x = 0$. På analogt sätt inses att f_5 är diskontinuerlig. Funktionen f_6 , slutligen, är diskontinuerlig, eftersom dess graf består av två separata stycken, nämligen linjen $y = 2x - 3$ så när som på punkten (2.1) samt punkten (2.3) .

Det är mycket viktigt att man vänjer sig vid att betrakta en sådan funktion som exempelvis f_3 som en funktion och inte två. Funktionsvärdena för en funktion får ju beskrivas på vilket sätt som helst, således exempelvis genom två eller flera olika formler giltiga i olika delar av definitionsmängden.

Övning 17. Vilka av följande funktioner är kontinuerliga i hela R ?

a) $f_1(x) = x/(1 + x^2)$

b) $f_2(x) = x/(1 - x^2)$

c) $f_3(x) = \begin{cases} \cos x & \text{för } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{för } x > 0 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{för } x \leq 0 \\ \cos x & \text{för } x > 0 . \end{cases}$

Övning 18. Rörelsen hos en boll beskrivs av en funktion $y = f(t)$ på så sätt att bollen vid tiden t sekunder befinner sig y meter över marken. Bollen rör sig endast i vertikalled. Vilka av nedanstående rörelseförlopp anser Du är fysikaliskt rimliga?

a) $f_1(t) = \begin{cases} 2 - t & \text{för } 0 \leq t \leq 2 \\ t - 2 & \text{för } 2 < t \leq 5 \end{cases}$

b) $f_2(t) = \begin{cases} 5 - 2t & \text{för } 0 \leq t \leq 2 \\ t & \text{för } 2 < t \leq 5 . \end{cases}$

För att kunna uttala och bevisa generella utsagor om kontinuerliga funktioner (t.ex. "produkten av två kontinuerliga funktioner är alltid kontinuerlig") måste man med full precision fastställa vad det skall betyda att en funktion är kontinuerlig. Det är därvid önskvärt att ha en definition som är baserad direkt på funktionens värden och inte går via funktionens graf som ju kan vara svår att upprita, och framför allt inte är baserad på det oprecisa begreppet "består av ett sammanhängande stycke". Den precisa definitionen av att $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x_o finns mitt på sidan 33 i CJ. Definitionen bör kompletteras med att en funktion kallas kontinuerlig om den är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd.

Innebörden av villkoret i definitionen brukar ta någon tid att förstå. Vi ger några övningar för att belysa innebörden.

Exempel 10. Sätt $f(x) = 6x + 2$.

a) Bestäm ett tal $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(2)| < \frac{1}{10}$$

för alla x för vilka $|x-2| < \delta$.

b) Låt x_o vara ett godtyckligt reellt tal och låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Bestäm ett tal $\delta > 0$ (som får bero på x_o och ε) så att

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

för alla x för vilka $|x-x_o| < \delta$.

Lösning. a) $|f(x) - f(2)| = |6(x-2)| = 6|x-2|$. Alltså är $|f(x) - f(2)| < 1/10 \iff |x-2| < 1/60$. Vi kan således välja $\delta = 1/60$. (Observera att vilket som helst positivt δ som är mindre än $1/60$ också duger, t.ex. $\delta = 1/100$ eller $\delta = 1/1000$; kontrollera själv detta!)

b) $|f(x) - f(x_o)| = 6|x-x_o|$. Således gäller $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon \iff |x-x_o| < \varepsilon/6$. Vi kan alltså välja $\delta = \varepsilon/6$. (I detta fall beror således δ på ε men inte på x_o.)

Övning 19. Sätt $f(x) = \sqrt{|x|}$.

a) Bestäm ett tal $\delta > 0$ så att

$$|f(x) = f(0)| < \frac{1}{10}$$

för alla x för vilka $|x| < \delta$.

b) Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Bestäm ett tal $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

för alla x för vilka $|x| < \delta$.

Övning 20. Sätt $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Bestäm ett tal $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(0)| < \frac{1}{10}$$

för alla x för vilka $|x| < \delta$.

b) Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Bestäm ett tal $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

för alla x för vilka $|x| < \delta$.

Kap. 1.2e. En funktion f kallas omvändbar om det för varje $y \in V_f$ finns precis ett $x \in D_f$ (alltså högst ett $x \in D_f$) så att $f(x) = y$. Om f är omvändbar, så kallar man för inversa funktionen till f, den funktion g för vilken $g(y)$ är lika med motsvarande tal $x \in D_f$ för varje $y \in V_f$ (CJ sid. 45, NE del 2, kap. 9.9). Observera att $D_g = V_f$ och $V_g = D_f$.

Exempel 11. Sätt $f(x) = 2x - 1$, $D_f = [0,2]$. Beräkna inversa funktionen g till f. Ange också D_g.

Lösning. Man finner funktionen g genom att lösa x med avseende på y ur ekvationen $y = f(x) = 2x - 1$. I detta fall $x = (y+1)/2$, alltså $g(y) = (y+1)/2$. Om man vill ange g med x som variabel så kan man naturligtvis göra det: $g(x) = (x+1)/2$. Vidare är $D_g = V_f = [f(0),f(2)] = [-1,3]$.

Exempel 12. Sätt $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = [0,2]$. Sök inversa funktionen g till f och ange D_g.

Lösning. $V_f = [1,5]$, alltså $D_g = [1,5]$. Av $y = x^2 + 1$ får vi $x = \pm\sqrt{y-1}$. Om $y \in D_g$ är $y \geq 1$, varför uttrycket under rotmärket alltid är ≥ 0. För att avgöra om vi skall välja + eller −tecknet erinrar vi oss att $g(y)$ definierades som det x-värde för vilket $x \in D_f$ och $f(x) = y$. Av de bägge talen $\pm\sqrt{y-1}$ är det endast det som är ≥ 0, alltså $\sqrt{y-1}$, som tillhör D_f. Alltså $g(y) = \sqrt{y-1}$.

Övning 21. Sätt $f(x) = 3x + 5$, $D_f = \{x,\ 1 \leq x \leq 3\}$, Beräkna inversa funktionen g och dess definitionsmängd.

Övning 22. Samma uppgift då $f(x) = x^2 + 1$ och $D_f = [1,3]$.

Övning 23. Arean av en kvadrat med sidan x är $f(x) = x^2$. Beräkna den inversa funktionen g till f, och ange den geometriska betydelsen hos g.

Övning 24. Visa att funktionen $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $-1 \leq x \leq 2$, är strängt monoton och således omvändbar. Bestäm ett uttryck för inversa funktionen med angivande av dess definitionsmängd.

Övning 25. Om C är temperaturen i Celsiusgrader och F i Fahrenheitgrader, så gäller sambandet $F = f(C)$, där

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 .$$

Definitionsmängden för funktionen f är $\{x;\ x \geq -273\}$, eftersom absoluta nollpunkten är $-273^{\circ}C$. Beräkna inversa funktionen g till f med angivande av dess definitionsmängd, och förklara den fysikaliska betydelsen hos g.

Övning 26. För s.k. beskattningsbara årsinkomster under 30000 kronor är den statliga inkomstskatten (år 1977) bestämd på följande sätt. Om x betecknar inkomsten och y skatten, så gäller sambandet $y = f(x)$, där

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}04\,x & \text{för } 0 \leq x < 20000 \\ 800 + 0{,}1(x-20000) & \text{för } 20000 \leq x < 25000 \\ 1300 + 0{,}2(x-25000) & \text{för } 25000 \leq x \leq 30000\,. \end{cases}$$

Undersök om $f(x)$ är kontinuerlig. Visa att $f(x)$ är omvändbar, och beräkna inversa funktionen till f (ange definitionsmängden för g). Förklara betydelsen av funktionen g.
Ledning: Observera att g måste beskrivas med hjälp av flera formler, giltiga i olika delar av g:s definitionsmängd.

Kap. 1.3e. Den sammansatta funktionen $f(x) = g(\phi(x))$ av två funktioner $\phi(x)$ och $g(u)$ definieras på sidan 52 i CJ (NE del 2, kap. 9.4).

Exempel 13. Sätt $g(x) = x + 1$, $h(x) = x^2$. Beräkna $g(h(x))$ och $h(g(x))$.

Lösning. $g(h(x)) = h(x) + 1 = x^2 + 1$, och $h(g(x)) = g(x)^2 = (x+1)^2$.

Exempel 14. Sätt $f(x) = 1/x$, $D_f = [2,5]$, och $g(x) = 1 - x^2$, $D_g = R$. Beräkna $h(x) = g(f(x))$ och ange V_h. Kan man också beräkna $f(g(x))$?

Lösning. Eftersom $D_g = R$ så är V_f självklart innehållen i D_g; alltså kan vi bilda $h(x) = g(f(x))$. Vi får $h(x) = 1 - (f(x))^2 = 1 - (1/x)^2$, $D_h = D_f = [2,5]$. Eftersom h är monoton för $x \in [2,5]$ (varför?) så får vi $V_h = [h(2),h(5)] = [3/4,24/25]$. Däremot kan $f(g(x))$ inte beräknas, ty V_g är ej innehållen i $D_f = [2,5]$. I själva verket är $V_g = \{y;\ y \leq 1\}$.

Övning 27. Sätt $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 1$. Beräkna $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

Övning 28. Sätt $f(x) = 2x + 4$ och $g(x) = (x/2) - 2$. Beräkna $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

Övning 29. Sätt $f(x) = 2x + 4$, $D_f = [0,2]$, och $g(x) = 1/x$. Beräkna $h(x) = g(f(x))$ och ange V_h.

Övning 30. Antag att man vid växling av x dollar i bank får $f(x) = 4,2x - 5$ svenska kronor; man får med andra ord betala en fast växlingsavgift på 5 kronor oavsett beloppets storlek. Antag vidare att växling av 6 svenska kronor ger $g(y) = 1,3y - 6$ danska kronor. Beräkna den sammansatta funktionen $h(x) = g(f(x))$ och ange dess betydelse. Kan man också ange någon betydelse för $f(g(y))$?

Övning 31. En fritt fallande kropp som befinner sig i vila vid tiden $t = 0$ har efter tiden t hastigheten $f(t) = gt$, där g är tyngdaccelerationen. Den kinetiska energin hos en kropp med massan m och hastigheten v är $h(v) = mv^2/2$. Beräkna den sammansatta funktionen $\phi(t) = h(f(t))$, och ange dess fysikaliska betydelse.

Övning 32. Sätt $f(x) = x/(x+1)$, $1 \le x \le 3$. Beräkna den inversa funktionen g (med sin definitionsmängd). Beräkna vidare de sammansatta funktionerna $h(x) = g(f(x))$ och $k(y) = f(g(y))$ (glöm inte definitionsmängderna).

Kap. 1.5. Principen för s.k. "induktionsbevis" förklaras på sidan 57 i CJ (NE del 3, kap. 9). Ett illustrativt exempel ges på sidan 58. Vi ger ytterligare ett exempel här.

Exempel 15. Visa med induktion formeln

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{för varje heltal } n \ge 1 .$$

Lösning. Beteckna vänstra ledet ovan med S_n. Vårt påstående kan då skrivas

(1) $\qquad S_n = n(n+1)/2 \quad$ för varje heltal $n \ge 1$.

Eftersom $S_1 = 1$ och $1(1+1)/2 = 1$, så gäller formeln (1) för $n = 1$. Antag nu att r är ett positivt heltal, och antag att vi vet att (1) gäller för $n = r$, dvs att

(2) $\qquad S_r = r(r+1)/2$.

Vi skall nu med hjälp av antagandet (2) visa att (1) gäller för $n=r+1$, dvs att

(3) $\qquad S_{r+1} = (r+1)(r+2)/2$.

För att göra detta observerar vi att $S_{r+1} = S_r + r + 1$ och använder (2), varvid vi får

$$S_{r+1} = S_r + r + 1 = \frac{r(r+1)}{2} + r + 1 = \frac{(r+2)(r+1)}{2} .$$

Därmed har vi visat (3). Enligt principen om matematisk induktion har vi därmed visat att (1) gäller för alla n.

Övning 33. Visa med hjälp av induktion formeln

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1},$$

samt den allmännare formeln ($k \neq 1$)

$$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = a\frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Övning 34. Visa med hjälp av induktion formlerna

a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 1,$

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad n \geq 1,$

c) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad n \geq 1.$

Övning 35. Visa med hjälp av induktion att $2n \leq 2^n$ för varje heltal $n \geq 0$.

Kap. 1.6. Begreppet gränsvärde för en talföljd bör förstås dels intuitivt, dels såsom det med matematisk precision formuleras i gränsvärdesdefinitionen (CJ sid. 70). I avsnitten 1.6 a-c förklaras gränsvärdesbegreppet ur intuitiv synpunkt utgående från några enkla exempel.

Det är viktigt att känna till nedanstående s.k. standardgränsvärden och att kunna utnyttja dessa för gränsvärdesberäkningar:

(A) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \quad (p > 0)$ (sid. 64)

(B) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (sid. 69)

(C) $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ om $0 < \alpha < 1$ (sid. 65)

(D) $\alpha^n \to \infty$ då $n \to \infty$, om $\alpha > 1$ (sid. 65)

(E) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\alpha^n} = 0$, om $\alpha > 1$ (sid. 70)

Observera att bevisen i CJ för dessa fem gränsvärden kan förstås utan full förståelse för gränsvärdesdefinitionen, om man blott accepterar följande intuitivt lättförståeliga princip:

(P) Om $0 \leq a_n \leq c_n$ och $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$,
så måste $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

I bevisen på sidorna 64, 65 och 70 tillämpas denna princip med $c_n = K/n$ (K = konstant), på sidan 69 tillämpas samma princip med $c_n = K/\sqrt{n}$.

I nedanstående övningar föreslås att man arbetar med intuitivt gränsvärdesbegrepp och att man övar sig att dra korrekta slutsatser, om än ej alltid med fullt rigorösa argument.

Exempel 16. Beräkna gränsvärdena

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n + 3}{3n + 4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 7}{n^3 + 2n}$

Lösning. a) (Jfr NE del 3, uppg. 428.) Förkorta bråket med n:

$$\frac{2n + 3}{3n + 4} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n}} .$$

Eftersom $3/n$ och $4/n$ går mot 0 då $n \to \infty$, så går täljaren mot 2 och nämnaren mot 3 . Härav kan vi dra slutsatsen (vi hoppar t.v. över beviset) att bråket går mot $2/3$, alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 3}{3n + 4} = \frac{2}{3} .$$

b) (Jfr NE del 3, uppg. 429.) Förkorta bråket med n^3:

$$\frac{n^2 - 7}{n^3 + 2n} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2}} .$$

Genom att resonera på analogt sätt som i a) får vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 7}{n^3 + 2n} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = 0 .$$

<u>Övning 35</u>. Beräkna gränsvärdet av nedanstående uttryck då $n \to \infty$:

a) $\dfrac{n+2}{7-3n}$ d) $\dfrac{n^3+2}{n(1-7n^2)}$

b) $\dfrac{n^2+1}{2-n}$ e) $\dfrac{1+5n^2+n^3}{n^2(2+\sqrt{n})}$

c) $\dfrac{1+2n+n^3}{n^4}$ f) $\dfrac{(\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n})\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-3n}$.

Då det förekommer andra elementära funktioner än polynomfunktioner måste man använda standardgränsvärdena. Det är praktiskt att lära sig en allmännare variant av standardgränsvärdet (E), nämligen

(E') För godtyckligt reellt tal k och $\alpha > 1$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\alpha^n} = 0 \, .$$

Vi bevisar detta för $k = 2$ och lämnar resten som en övning åt läsaren (visa först (E') för varje <u>heltal</u> k , och sedan för godtyckligt reellt k med hjälp av argumentet (P)). Vi använder identiteten

$$\frac{n^2}{\alpha^n} = \frac{n}{(\sqrt{\alpha})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt{\alpha})^n} \, .$$

Eftersom $\sqrt{\alpha} > 1$ om $\alpha > 1$, så går vardera faktorn i högra ledet mot noll enligt standardgränsvärdet (E) . Alltså går det hela mot noll.

Man måste också kunna utnyttja (A) och (B) på t.ex. följande sätt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = 1 \, , \quad \text{ty}$$

$$\sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$$

enligt (A) och (B) . Likaså

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1 \, , \quad \text{ty}$$

$$\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \quad 1 \cdot 1 = 1$$

enligt (B) .

Exempel 17. Beräkna gränsvärdet då $n \to \infty$ för vart och ett av uttrycken

a) $\dfrac{n^2 + 1}{n + 2^n}$

b) $\dfrac{3^{-n}(n + 3n^2)}{\sqrt[n]{100}}$.

Lösning. a) Förkorta med 2^n , eftersom denna term är störst av de förekommande termerna:

$$\frac{n^2 + 1}{n + 2^n} = \frac{n^2 \cdot 2^{-n} + 2^{-n}}{n \cdot 2^{-n} + 1} .$$

Här går nu täljaren mot noll och nämnaren mot 1 på grund av standardgränsvärde (E), alltså går det hela mot noll.

b) Nämnaren går mot 1 enligt (A) , och

$$3^{-n}(n + 3n^2) = \frac{n}{3^n} + 3\,\frac{n^2}{3^n}$$

går mot $0 + 0 = 0$ enligt (E') .

Övning 36. Beräkna gränsvärdet för vart och ett av uttrycken

a) $\dfrac{n \cdot \sqrt[n]{10} + 1}{n^2}$

c) $\dfrac{n^{10}}{1{,}1^n}$

b) $\dfrac{1{,}2^n + 8n^{25}}{5n^{35} + 1}$

d) $\dfrac{n \cdot \sqrt[n]{6n^2}}{\sqrt{n} + 2n}$

e) $\dfrac{n^2\,(\frac{9}{10})^n + \sqrt{n}}{n + 1}$.

Ofta är det praktiskt att med hjälp av olikheter stänga in den givna talföljden mellan två talföljder med ett och samma gränsvärde; därvid behöver man åberopa följande naturliga utsaga

(Q) Antag att $b_n \leq a_n \leq c_n$ för alla n och att $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.
Då är även $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Utsagan (P) ovan är ett specialfall av (Q) svarande mot $b_n = 0$ för alla n och $A = 0$. Men den allmännare utsagan (Q) följer genast av (P), ty om $b_n \leq a_n \leq c_n$, så är $0 \leq a_n - b_n \leq c_n - b_n$, varför enligt (P) måste gälla

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - A = 0 ,$$

och således $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + A = A$.

<u>Exempel 18</u>. Beräkna gränsvärdet då $n \to \infty$ av talföljderna

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 3n}}$

b) $\sqrt[n]{n^2 + 5n}$

<u>Lösning</u>. a) Vi har $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 3n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n}$.

Eftersom $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, så måste alltså det sökta gränsvärdet vara 0.

b) $\sqrt[n]{n^2 + 5n} = \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{1 + (5/n)}$. Nu är $1 < \sqrt[n]{1 + (5/n)} < \sqrt[n]{2}$ för alla $n > 6$.

Eftersom $\sqrt[n]{2} \to 1$, så följer nu av resonemanget (Q) att $\sqrt[n]{1 + (5/n)} \to 1$, då $n \to \infty$. Således får vi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 5n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{5}{n}} = 1 \cdot 1 = 1 .$$

<u>Övning 37</u>. Beräkna gränsvärdet då $n \to \infty$ av var och en av talföljderna

a) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

b) $\sqrt[n]{1 + 2^n}$

c) $\sqrt[n]{n + 2^n}$

d) $\dfrac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}$

e) $(0,8)^n \cdot \sqrt{n^3 + 1}$.

Kap. 1.7. Nedanstående övningar är avsedda att illustrera innebörden av villkoret i gränsvärdesdefinitionen på sidan 70 i CJ (NE del 3 kap. 4.4, sid. 77). Jfr definitionen av kontinuerlig funktion på sidan 33.

Exempel 19. a) Bestäm ett tal N så att

$$(1) \qquad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10}$$

för alla $n > N$.

b) Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Bestäm ett tal N (som får bero på ε) så att

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

för alla $n > N$.

Lösning. $$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Alltså får vi ekvivalenserna

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n + 1 > 10 \Longleftrightarrow n > 9 .$$

Vi ser således att (1) måste gälla för alla $n > 9$. Vi kan alltså välja $N = 9$. Varje tal som är > 9 duger emellertid också som N (varför?).

b) På analogt sätt får vi ekvivalenserna

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 .$$

Här kan vi alltså som N välja vilket som helst heltal som är $> \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Ty om $n > N$ och $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, så är $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, och då måste tydligen (1) gälla.

Övning 38. a) Bestäm ett heltal N så att

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2} - 2\right| < \frac{1}{100}$$

för alla $n > N$.

b) Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Bestäm ett tal N så att

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2} - 2\right| < \varepsilon$$

för alla $N > n$.

Vi såg i lösningen till Exempel 19 att vi faktiskt inte behövde den logiska ekvivalensen mellan de olika leden, utan det hade räckt med implikationer uppåt, eller baklänges, hur man nu vill uttrycka det, dvs det hade räckt att visa att

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10} \Longleftarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \Longleftarrow$$

$$\Longleftarrow n + 1 > 10 \Longleftarrow n > 9 .$$

Detta förhållande kan man ofta utnyttja för att med hjälp av olikheter förenkla räkningarna avsevärt. I sådana fall finner man inte det minsta N som löser uppgiften, men det gör ju inget; det erfordras ju blott att man finner något sådant N, vilket som helst.

Exempel 20. Bestäm ett tal N så att

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}} < \frac{1}{100}$$

för alla $n > N$.

Lösning. Vi utnyttjar olikheten

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} .$$

Vi får härigenom följande räcka av implikationer och ekvivalenser (kontrollera själv!)

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}} < \frac{1}{100} \Longleftarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Longleftrightarrow n > 100 .$$

Vi kan alltså exempelvis välja $N = 100$.

Exempel 21. Bestäm ett tal N så att

$$\frac{n}{1,1^n} < 10^{-6}$$

för alla $n > N$.

Lösning. Enligt en olikhet på tionde raden på sidan 70 i CJ gäller att

$$\frac{n}{1,1^n} < \frac{2}{(n-1)0,1^2} = \frac{1}{50(n-1)}$$

(här är $h = 1,1 - 1 = 0,1$). Vi får således såsom i Exempel 20

$$\frac{n}{1,1^n} < 10^{-6} \Longleftarrow \frac{1}{50(n-1)} < 10^{-6} \Longleftrightarrow n - 1 > 20000 \Longleftrightarrow n > 20001 .$$

Vår kalkyl visar således att talet $N = 20001$ säkert duger (men detta värde på N är inte det minsta möjliga). Kontrollera gärna detta resultat på fickkalkylatorn genom att beräkna $n/1,1^n$ för ett antal olika värden på n.

I övningarna 39-42 föreslås att Du kontrollerar Dina resultat med hjälp av fickkalkylator genom att beräkna den givna talföljdens värde för några lämpligt valda n .

Övning 39. Bestäm ett tal N så att

$$\frac{n}{1 + n^2} < \frac{1}{100}$$

för alla $n > N$.

Övning 40. Bestäm ett tal N så att

a) $\frac{2n - 3}{n^2 + 5n} < \frac{1}{100}$

b) $\frac{2n + 3}{n^2 + 5n} < \frac{1}{100}$

för alla $n > N$.

Övning 41. Bestäm ett tal N så att

$$\frac{n}{\sqrt{1 + n^3}} < \frac{1}{100}$$

för alla $n > N$.

Övning 42. Bestäm ett tal N så att

$$\frac{n^{10}}{2^n} < 10^{-5}$$

för alla $n > N$. (Ledning: utnyttja att $n^{10}/2^n = (n/\sqrt[10]{2})^{10}$ och använd resonemanget i Exempel 21.)

Vad som menas med att en talföljd är begränsad (bounded) förklaras mitt på sidan 71. Termerna monotont växande och monotont avtagande definieras överst på sidan 74. Observera (sid. 71) att en talföljd som är både monoton och begränsad måste vara konvergent.

Två vanliga sätt att visa att en följd är monotont växande är att visa att $a_{n+1} - a_n \geq 0$ respektive att $a_{n+1}/a_n \geq 1$ för alla n.

Exempel 22. Vilka av följande talföljder är begränsade, och vilka är monotona?

a) $a_n = (-1)^n$

b) $b_n = (-1)^n/n$

c) $c_n = 1 - \frac{1}{n}$

d) $d_n = 2n^2 - 3n + 5$

e) $e_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 3$.

Lösning. (a), (b) och (c) och (e) är begränsade. Ty $|a_n| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$ och $0 \leq c_n < 1$ för alla n. e_n måste vara begränsad, eftersom den är konvergent (sid. 70). Följden d_n är obegränsad. Uppenbarligen är varken a_n eller b_n monotona, medan c_n är monotont växande. För att undersöka om d_n är monoton bildar vi

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 2n^2 + 3n = \\ &= 4n + 2 - 3 = 4n - 1 . \end{aligned}$$

Eftersom $4n - 1 > 0$ för alla $n \geq 1$, så är följden monotont växande. För att undersöka om e_n är monoton bildar vi

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 .$$

Om $n \geq 3$, så är $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 < 2$, och således $e_{n+1}/e_n < 1$. Alltså är följden e_n monotont avtagande.

Övning 43. Vilka av följande talföljder är begränsade och vilka är monotona?

a) $a_n = (-2)^2$

b) $b_n = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

c) $c_n = n - \frac{1}{n}$

d) $d_n = 3n^2 - 15n + 7$, $n \geq 3$

e) $e_n = \frac{n^2}{(1,2)^n}$, $n \geq 15$

f) $f_n = \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}$.

Övning 44. a) Vilka av följderna i Exempel 22 är konvergenta?

b) Samma fråga för följderna i Övning 43.

En oändlig serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

kallas konvergent, om talföljden

$$(1) \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k , \quad n = 1,2,\ldots$$

av alla seriens partialsummor utgör en konvergent talföljd (CJ sidorna 75, 76; NE del 3, kap. 4.5). Gränsvärdet

$$(2) \qquad s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

kallas då för seriens summa, och man skriver

$$(3) \qquad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(Observera således att innebörden av (3), vilken i och för sig inte är självklar, är fastlagd av (1), (2) och definitionen av gränsvärde för talföljder.)

Exempel 23. Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} .$$

Lösning. (Jfr NE del 3, kap. 4.5 Exempel 1.) Vi känner ett uttryck för summan av en ändlig geometrisk serie, i detta fall

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) .$$

Alltså är seriens summa

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2} .$$

Övning 45. Beräkna summan av serierna

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ och b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{5^k}$.

Övning 46. Beräkna med hjälp av resultatet av Övning 34 a summan av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} .$$

Kap. 1.8. Innebörden av uttrycken

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)$$

förklaras på sidorna 82-86 i CJ (NE del 2, kap. 5.3). Såväl definitionerna som metoderna att beräkna gränsvärdet för en given funktion är analoga med vad som gäller för gränsvärden för talföljder. Vi behöver dock ett nytt standardgränsvärde, nämligen (CJ sid. 84)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Exempel 24. Beräkna gränsvärdena

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2}{x\sqrt{x^2+1}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x}}{\sin x}$.

Lösning. a) Genom att resonera på analogt sätt som i kap. 1.6 får vi

$$\frac{x^2 + 2}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \to \frac{1 + 0}{\sqrt{1+0}} = 1 , \quad \text{då} \quad x \to \infty .$$

b) Eftersom $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, så är även $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ (varför) , alltså

$$\frac{x\sqrt{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \sqrt{x} \to 1 \cdot 0 = 0 \text{ då } x \to 0 .$$

Om man har att studera

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

bör man skilja mellan situationen då $a \notin D_f$, t.ex.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x - 2}$$

och den situationen då $a \in D_f$, t.ex.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to \pi/2} x \sin x .$$

I det senare fallet kan gränsvärdet ofta beräknas genom insättning av $x = a$ i funktionsuttrycket, således i exemplen

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+0^2} = 1 ,$$

$$\lim_{x\to \pi/2} x \sin x = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} .$$

Man bör emellertid ha klart för sig att

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

<u>ingalunda är samma sak som</u> $f(x)$.

Att likheten

(1) $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

gäller i de nyssnämnda exemplen beror nämligen på att funktionen f i dessa fall är kontinuerlig i a . I själva verket är det en viktig poäng med gränsvärdesbegreppet att det hjälper oss att förstå kontinuitetsbegreppet genom att vi inser att likheten (1) betyder precis samma sak som att f är kontinuerlig i $x = a$. (CJ mitt på sidan 82; NE del 2 kap. 5.6 sid. 94).

Ibland är det praktiskt att förlänga ett bråk med ett uttryck som möjliggör användning av konjugatregeln.

Exempel 25. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

Lösning. Förläng med $\sqrt{1+x} + 1$:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{(1+x) - 1^2}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} .$$

Gränsvärdet kan nu lätt beräknas och fås till 1/2 .

En vanlig metod att transformera ett givet gränsvärde till ett känt sådant är att göra en variabelsubstitution, exempelvis sätta $x - a = y$ för ett lämpligt valt a . Vi illustrerar metoden med ett exempel.

Exempel 26. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x(x-\pi)} .$$

Lösning. Sätt $x - \pi = y$. Då går y mot 0 då x går mot π , alltså är det givna gränsvärdet lika med

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi)}{(y+\pi)y} .$$

Men $\sin(y+\pi) = -\sin y$, alltså

$$\frac{\sin(y+\pi)}{(y+\pi)y} = -\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{y+\pi} \to -1 \cdot \frac{1}{\pi} = -1/\pi \text{ , då } y \to 0 .$$

Övning 47. Beräkna gränsvärdena

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

c) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{x \cos x}{2x - \pi}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x}$

(Ledning: använd ett resonemang analogt med (P) ovan, kap. 1.6.)

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$.

Svar och anvisningar kap. 1

1. a) $\{x;\ x \geq -1,\ x \neq 0\}$
   b) R
   c) $\{x;\ x > 1\} \cup \{x;\ x < -1\}$
   d) $\{x;\ x \geq 1\} \cup \{x;\ x \leq -1\}$
   e) R
   f) $\{x;\ x > 1\} \cup \{x;\ x < -1\}$
   g) $\{x;\ x \neq n\pi$ för alla heltal $n\}$
   h) $\{x;\ n\pi < x < (n+1)\pi$ för något jämnt heltal $n\}$

2. a) $[-1,5]$
   b) $[0,3]$
   c) $[0,4] \cup [9,16]$
   d) $[0,\sqrt{2}]$
   e) $\{y;\ y \neq 0\}$

3. Mellan 1 m och 1,6 m .

4. Punkter norr om P på ett avstånd y km från P , där $10 \leq y \leq 25$.

5. Punkter norr om P på ett avstånd y km från P , där $25 \leq y \leq 50$.

6. Av olikheten $-1 \leq \sqrt{y}$ kan man inte dra slutsatsen att $1 \leq y$. Exempelvis $-1 \leq \sqrt{0}$ sann, men $1 \leq 0$ är falsk.

7. $f(0) = (0,-1)$, $f(1) = (1,1)$. V_f är det räta linjestycket med ändpunkter i $(0,-1)$ och $(3,5)$.

8. $f(0) = (0,0)$, $f(1) = (1,1)$, $f(2) = (2,4)$, $f(3) = (3,9)$. V_f är högra hälften av kurvan $y = x^2$. En kurva med denna form kallas för parabel.

9. $f(0) = (1,0)$, $f(\pi/4) = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $f(\pi/2) = (0,1)$, $f(3\pi/4) = (-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $f(\pi) = (-1,0)$, $f(5\pi/4) = (-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, $f(3\pi/2) = (0,-1)$, $f(7\pi/4) = (1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, $f(2\pi) = (1,0)$. V_f är cirkeln med radie 1 och medelpunkt $(0,0)$.

10. $f(x)$ måste först och främst vara $\neq 0$, ty annars existerar inte $1/f(x)$.
    Vi påstår nu:

    om $f(x)$ växande och $f(x) > 0$ för alla $x \in D_f$,
    så är $1/f(x)$ avtagande.

    Ty om $x_1 < x_2$, så är $f(x_1) \leq f(x_2)$ och således

$$\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2)f(x_1)} \leq 0 ,$$

vilket visar påståendet. På samma sätt kan man visa

om $f(x)$ växande och $f(x) < 0$ för alla $x \in D_f$,

så är $1/f(x)$ avtagande.

Genomför beviset såsom övning (observera att $f(x_2)f(x_1)$ måste vara > 0 även denna gång). Däremot kan man inte dra slutsatsen att $1/f(x)$ är avtagande enbart ur förutsättningen att $f(x)$ är växande. Ty exempelvis funktionen $f(x) = x$, $D_f = \{x; -1 \leq x \leq 1, x \neq 0\}$ är växande, men $1/f(x)$ är inte avtagande (varför?) (och givetvis inte heller växande).

11. $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 - 8(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 8)$. Om x_1 och x_2 är ≤ 4 så är $x_2 + x_1 - 8 \leq 0$. Följaktligen är $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ om $x_2 - x_1 > 0$, vilket visar att f är avtagande. Det andra påståendet visas på analogt sätt.

12. $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1)$. Om $x_2 - x_1 > 0$ och $a < 1$ så är $a^{x_2-x_1} < 1$, alltså $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

13. Av definitionen av absolutbelopp ser vi att $f(t) = 2t + 3(t-4) = 5t - 12$ då $t - 4 \geq 0$, och att $f(t) = 2t - 3(t-4) = -t + 12$ då $t - 4 \leq 0$. I det givna intervallets ändpunkter har vi $f(0) = 12$ resp. $f(10) = 38$. Vidare är $f(4) = 8$. Funktionens graf består alltså av två räta linjestycken (rita figur). Funktionen är avtagande för $0 \leq t \leq 4$, växande för $4 \leq t \leq 10$. Detta innebär att bilen rör sig åt söder under tidsintervallet $0 \leq t \leq 4$ och åt norr under intervallet $4 \leq t \leq 10$.

14. Uppförsbacke under intervallen $15 \leq t \leq 30$ och $45 \leq t \leq 60$.

15. Antalet invånare avtar för $0 \leq t \leq t_o \approx 17$ år , växer för $t_o \leq t \leq 50$.

16. Funktionerna b, e, g och i är jämna, a, c och h är udda, d och f är varken jämna eller udda.

17. f_1 och f_3 är kontinuerliga på hela R, f_2 och f_5 ej. (Funktionen f_2 är inte ens definierad på hela R, ty punkterna 1 och -1 tillhör ej D_{f_2}; f_2 är dock kontinuerlig <u>i sin definitionsmängd</u>, vi återkommer härtill nedan.)

18. Rörelsen a) är fysikaliskt rimlig, b) däremot ej, ty f_1 är kontinuerlig, f_2 däremot ej.

19. a) $\delta = 1/100$; b) $\delta = \varepsilon^2$.

20. a) Det största δ som duger är $\delta = \sqrt{1,1} - 1$. Eftersom ett mindre δ alltid duger (såvitt det är > 0), så kan man också välja t.ex. $\delta = 1/20$.
b) Största möjliga δ är $\delta = \sqrt{1+\varepsilon} - 1$. Exempelvis $\delta = \varepsilon/2$ duger också .

21. $g(y) = (y-5)/3$, $D_g = [8,14]$.

22. $g(y) = \sqrt{y-1}$, $D_g = [2,10]$.

23. $g(y) = \sqrt{y}$. $g(y)$ anger sidan av den kvadrat vars area är y .

24. $g(y) = 2 - \sqrt{9+y}$, $D_g = [-9,0]$.

25. $g(y) = \frac{5}{9}(y-32)$, $D_g = \{y \; ; \; y \geq 459\}$. (Siffran 459 är avrundad.) $g(y)$ anger antalet Celsiusgrader som svarar mot y Fahrenheitsgrader.

26. $f(x)$ är kontinuerlig, eftersom dess graf består av tre räta linjestycken som hänger samman i ändpunkterna. Inversa funktionen g är bestämd så:

$$g(y) = \begin{cases} 25\,y & \text{för } 0 \leq y \leq 800 \\ 20000 + 10(y-800) & \text{för } 800 \leq y \leq 1300 \\ 25000 + 5(y-1300) & \text{för } 1300 \leq y \leq 2300 \, , \end{cases}$$

och $D_g = [0,2300]$. $g(y)$ betyder den inkomst för vilken den statliga inkomstskatten är y .

27. $f(g(x)) = 2x$, $g(f(x)) = 2x + 1$.

28. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Detta innebär att f och g är varandras inverser.

29. $h(x) = 1/(2x+4)$, $V_h = [1/4, 1/8]$.

30. $h(x) = 5,46x - 12,5$. $h(x)$ är det antal danska kronor man får för x dollar, om man först växlar dollarn till svenska kronor och därefter växlar det man då får till danska kronor. Funktionen $f(g(y))$ har inte någon motsvarande tolkning.

31. $h(t) = mg^2t^2/2$. Funktionen $h(t)$ anger kroppens kinetiska energi efter t sekunders fritt fall.

32. $g(y) = y/(1-y)$, $D_g = [1/2, 3/4]$.
$h(x) = x$, $D_h = D_f = [1,3]$; $k(y) = y$, $D_k = D_g = [1/2, 3/4]$.

35. a) $-1/3$ d) $-1/7$
b) $-\infty$ e) ∞
c) 0 f) $-1/3$

36. a) 0 d) $1/2$
b) ∞ e) 0
c) 0

37. a) 1 d) 0
b) 2 e) 0
c) 2

38. a) $N = 10$
b) $N \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$ (observera att $1/\sqrt{\varepsilon}$ inte behöver vara ett heltal) .

39. $N = 100$

40. a) $N = 200$
b) $N = 500$ (här är det praktiskt att använda olikheten $(2n+3)/(n^2+5n) < (2n+3n)/n^2 = 5/n$.)

41. $N = 10^4$

42. Den uppskattning som anges i Ledningen och grov uppskattning uppåt ger $N = 1300$.

43. b_n, e_n och f_n är begränsade;
b_n, c_n och d_n är växande, e_n avtagande .

44. a) b_n och e_n konvergerar mot 0 , c_n mot 1 , a_n och d_n är divergenta.
b) b_n konvergerar mot 1 , e_n och f_n mot 0 , a_n, c_n och d_n är divergenta.

45. a) $1/4$ b) $1/6$

46. 1

47. a) $1/\sqrt{2}$ d) 0
b) $1/(2\sqrt{2})$ e) 0
c) $-\pi/4$ f) 0

KAPITEL 2. DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALKYLENS HUVUDIDEER

Om fysikens integralbegrepp och den matematiska integraldefinitionen

För att motivera definitionen av integralen för en funktion ska vi börja med att betrakta ett fysikaliskt exempel. Vi ska intressera oss för massan hos en tunn metalltråd vars s.k. lineära densitet λ, dvs massan per längdenhet, varierar längs tråden. (Den lineära densiteten λ förhåller sig till den vanliga (rymd-)densiteten ρ på så sätt att $\lambda = A\rho$ om A är trådens tvärsnittsarea.) Vi antar att vi känner densiteten λ i varje punkt av ett trådstycke, och vi önskar beräkna trådstyckets totala massa. För att formulera problemet matematiskt tänker vi oss att de olika punkterna på tråden anges genom angivande av avståndet x (längs tråden) till någon fix punkt på tråden, t.ex. trådens ena ändpunkt. Densitetens variation längs tråden kan därigenom beskrivas som en funktion av x, säg $\lambda = f(x)$, $0 \leq x \leq b$, där b är trådens längd. Vårt problem är nu att med kännedom om $f(x)$ beräkna trådens massa M.

Det är klart att vi kan besvara frågan om funktionen $f(x)$ är konstant; om nämligen $f(x) = c$ för alla x, $0 \leq x \leq b$, så är massan $M = bc$ på grund av definitionen av densiteten.

Antag härnäst att densiteten är konstant i vardera hälften av tråden, dvs $f(x) = c_1$ för $0 \leq x \leq b/2$ och $f(x) = c_2$ för $b/2 < x \leq b$. Då är givetvis massan för den ena hälften $c_1 b/2$ och för den andra $c_2 b/2$, alltså hela massan

$$M = \frac{c_1 b}{2} + \frac{c_2 b}{2} = (c_1 + c_2)b/2 .$$

Det är klart att vi på i princip analogt sätt kan beräkna trådens massa, om densiteten har tre eller tio eller etthundra olika konstanta värden längs lika många delar av tråden vars längder vi känner.

Övning 1. Antag att tråden är 6 meter lång och att densiteten λ är lika med 2.6 g/m för $0 \leq x \leq 2$, lika med 3.1 g/m för $2 < x \leq 4$ och lika med 2.9 g/m för $4 < x \leq 6$. Beräkna trådens massa.

Övning 2. Analog uppgift då tråden är 10 meter lång och densiteten $\lambda = f(x)$ har fem olika konstanta värden på följande sätt (enhet g/m)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4.1 && \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ &= 5.0 && 1 < x \leq 4 \\ &= 4.2 && 4 < x \leq 5 \\ &= 4.3 && 5 < x \leq 6 \\ &= 5.1 && 6 < x \leq 10 . \end{aligned}$$

Beräkna trådens totala massa.

Det är lätt att sammanfatta det vi hittills funnit i en formel. Antag att densiteten har det konstanta värdet c_1 i ett stycke av längden b_1, värdet c_2 i ett annat stycke av längden b_2 osv, totalt n trådstycken. Då är trådens totala massa

$$(1) \qquad M = c_1b_1 + \ldots + c_nb_n = \sum_{i=1}^{n} c_ib_i \ .$$

Observera att $\Sigma_{i=1}^{n} b_i$ måste vara lika med trådens totala längd b. Om alla småstyckena har samma längd, säg $b_1 = \ldots = b_n = h$ (då måste alltså $h=b/n$), så får vi

$$M = c_1h + \ldots + c_nh = h \sum_{i=1}^{n} c_i \ .$$

Antag nu att trådens densitet λ varierar "kontinuerligt", dvs densiteten är inte längre konstant längs delar av tråden. Exempelvis skulle $\lambda = f(x)$ kunna vara

$$\lambda = f(x) = 1 + 0.02x \ , \quad 0 \leq x \leq 10 \ .$$

Hur skall vi då beräkna trådens massa? Den hittills använda metoden duger uppenbarligen inte.

Problemet kan trots allt sägas vara ett slags summationsproblem. Ty kännedom om densiteten i varje punkt innebär att man känner massan hos små delar av tråden, och det gäller således att addera alla dessa massor. Svårigheten är att det är <u>oändligt</u> många (oändligt) små massor som måste adderas. Denna situation visar sig vara karakteristisk för problem som leder till en <u>integral</u>. I vårt exempel ges också lösningen av en integral; det visar sig nämligen att trådens massa är given genom integralen

$$(2) \qquad M = \int_0^b f(x)dx \ .$$

Här möter vi således en ny räkneoperation, och innan vi frågar oss hur man "räknar ut" uttrycket (2) måste vi fråga oss vad detta egentligen <u>betyder</u>. Med andra ord, innebörden av uttrycket i högra ledet av (2) måste fastläggas genom en <u>definition</u>. Definitionen, såsom den är formulerad i CJ och skall formuleras här, är anpassad till integralkalkylens tillämpningar på så sätt att riktigheten av formeln (2) blir en självklarhet så snart man satt sig in i definitionen. (Frågan om hur en integral av formen (2) skall <u>beräknas</u> för en given funktion $f(x)$ som är angiven genom en "formel" blir däremot långt ifrån en självklarhet; denna fråga tas upp i kap. 2.9.) Här skall vi nu redogöra för denna definition.

Vi tänker oss att vi delar in vår metalltråd i ettusen lika långa stycken, vartdera av längd $h = b/1000$. Beteckna mittpunkten i det i:te trådstycket (räknat från änden $x = 0$) med ξ_i. Eftersom vi känner densiteten $\lambda = f(x)$ i varje punkt på tråden, så känner vi densiteterna $f(\xi_i)$ för alla i. Det är nu rimligt att anta att densiteten varieras obetydligt i varje litet trådstycke. Massan hos hela tråden bör därför vara ungefär densamma som om densiteten varit konstant lika med $f(\xi_i)$ i det i:te trådstycket för varje i. Men för denna situation har vi redan funnit en formel för trådens massa, nämligen

$$h \sum_{i=1}^{1000} f(\xi_i) .$$

Givetvis kan vi tänka oss att vi utför en analog beräkning genom indelning av tråden i ett godtyckligt antal delar i stället för just 1000, låt oss säga n stycken delar. Vi får då som approximativt värde på M

$$(3) \qquad M \approx h \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Det är nu fysikaliskt naturligt att anta att avvikelsen mellan det sanna värdet på M och närmevärdet i (3) närmar sig noll då n växer mot ∞, dvs att likheten

$$(4) \qquad M = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

gäller exakt. Om vi <u>betecknar</u> högra ledet av (4) med

$$(5) \qquad \int_0^b f(x)dx$$

så kan formeln (4) tydligen skrivas

$$(4') \qquad M = \int_0^b f(x)dx .$$

Annorlunda uttryckt: härmed har vi <u>definierat</u> uttrycket (5) som gränsvärdet i högra ledet av (4).

Uträkning av summor av typen (3) för en given funktion f för stora värden på n är givetvis en mödosam operation om man inte har en dator till hjälp. Å andra sidan är det i detta sammanhang inte frågan om <u>uträkning</u> av integraler för givna funktioner f, utan det rör sig om en <u>tänkt</u> beräkning, som är avsedd endast att ge oss förståelse för det matematiska integralbegreppets fysikaliska innebörd.

Ovanstående definition är blott en obetydlig förenkling av definitionen på sidorna 124-125 i CJ. För att se sambandet, låt oss i stället indela vår tråd i n stycken inte nödvändigtvis lika långa stycken, kalla koordinaterna för delningspunkterna för $x_1,\ldots,x_{n-1}$, ändpunkterna för x_0 och x_n, sätt som i CJ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ för $i = 1,\ldots,n$, och låt ξ_i vara vilken som helst punkt i det i:te intervallet (trådstycket). Eftersom längden av det i:te trådstycket är Δx_i, så är massan för detta ungefär lika med $f(\xi_i)\Delta x_i$, om trådstycket är så kort att $f(x)$ är nästan konstant på detta, och massan för hela trådstycket blir således ungefär lika med

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ ,$$

vilket är det uttryck som i CJ är motsvarigheten till summan (3). Ofta väljer man $\xi_i = x_i$, varvid (6) får formen

$$(6')\qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\ .$$

Beteckningen Δx_i för längden av delintervallen är praktisk, ty övergången från summan (6') till integralen (2) blir därigenom mycket naturlig.

Här skall vi blott ge några ytterligare synpunkter på integralers roll i fysiken. I själva verket påstår vi:

> Varje gång man behöver addera oändligt många (oändligt) små storheter, så är det fråga om en integration.

Vi skall ge några exempel på detta.

Resonemangen i detta avsnitt behandlas i NE del 2, kap. 8.5. Observera dock att NE <u>definierar</u> uttrycket $\int_a^b f(x)dx$ som $F(b) - F(a)$, där F är en primitiv funktion till F, dvs derivatan av F är lika med f. Formeln (NE del 2, sid. 148; CJ sid. 125)

$$(7)\qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

blir då ett <u>påstående</u> som kan bevisas. I CJ, liksom i all matematisk litteratur på universitetsstadiet, är situationen den omvända: (7) är definition, och formeln $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ blir därför en sats som måste bevisas.

<u>Exempel 1</u>. <u>Väg och hastighet</u>. Ett fordon färdas under tiden T med den konstanta hastigheten v. Då är den tillryggalagda vägen $s = vT$. Om hastigheten v varieras med tiden enligt funktionen $v = f(t)$, $0 \le t \le T$, så blir vägen

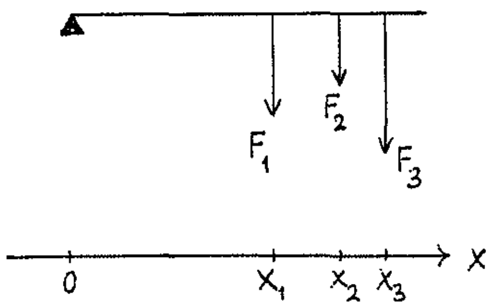
(8) $$s = \int_0^T f(t)dt \ .$$

Ty om fordonet har den (approximativt) konstanta hastigheten $v = f(t_i)$ under det lilla tidsintervallet $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t_i$, så är motsvarande vägsträcka $f(t_i)\Delta t_i$. Om vi adderar n stycken sådana vägsträckor, så får vi

(9) $$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \ .$$

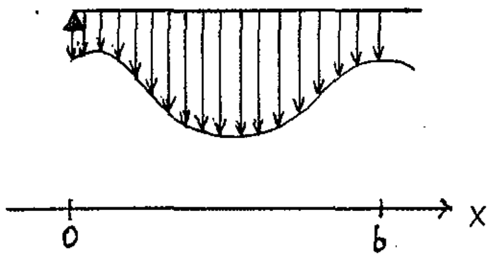
I det generella fallet ersätts summan (9) av integralen (8) .

Exempel 2. Kraft och moment. De tre krafterna i figuren, F_1, F_2 resp. F_3 har hävstängerna x_1, x_2 resp. x_3 meter relativt punkten P . Då är som bekant krafternas sammanlagda moment relativt P lika med



$$M = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3.$$

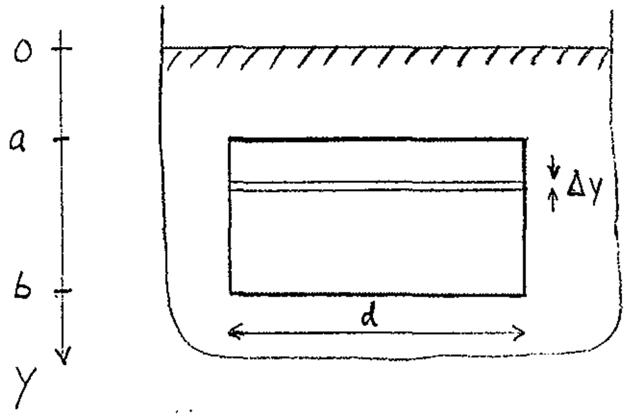
Om vi i stället tänker oss att vi har en kontinuerligt utbredd last i intervallet $0 \leq x \leq b$ med "tätheten" $F(x)$ (kraft per längdenhet) i punkten x, så har vi åter en situation där det gäller att addera oändligt små bidrag till det totala momentet. Kraften på det lilla stycket mellan x och $x + \Delta x$ är $F(x)\Delta x$. Momentet för denna kraft är $x \cdot F(x)\Delta x$. Om vi "adderar" oändligt många sådana bidrag till momentet får vi såsom i exemplen ovan det totala momentet till



$$M = \int_0^b xF(x)dx \ .$$

(Observera att den totala kraften däremot är $\int_0^b F(x)dx$.)

Exempel 3. Tryck och kraft. På ett djup av y meter under en vätskeyta råder trycket ρgy , om vätskans densitet är ρ och g är tyngdaccelerationen. Detta innebär att på ett plant ytstycke med arean S , vars alla delar befinner sig på samma djup y verkar den totala kraften ρgyS. Antag nu att vi vill beräkna den kraft som verkar på ett vertikalt rektangulärt ytstycke såsom i figuren. Svårigheten är att trycket är olika på olika delar av ytan. För att bemästra denna svårighet betraktar vi sådana delar av ytan på vilka trycket är approximativt konstant, nämligen horisontella smala strimlor såsom i figuren. Antag att ytstycket har den horisontella bredden d,



och att dess övre resp. undre kant ligger på djupet $y = a$ resp. $y = b$. En smal strimla på djupet y som har bredden Δy har då arean $d\Delta y$, varför kraften på denna blir approximativt

$$\rho g y d \Delta y$$

Genom "summation" av krafterna på alla strimlorna får vi den totala kraften till

$$F = \int_a^b \rho g y d \, dy$$

<u>Exempel 4</u>. <u>Massa och densitet igen</u>. Låt oss beräkna massan av en vertikal luftpelare med basen vid havsytan, höjden H och genomskärningsarea A. Luftens densitet ρ kan antas variera med höjden h över havsytan enligt formeln

$$\rho = a\, e^{-\beta h} ,$$

där a och β är vissa konstanter. Svårigheten är förstås att densiteten inte är konstant i hela luftpelaren utan varierar med höjden. I en tunn horisontell "skiva" — det är givetvis fråga om en <u>tänkt</u> skiva — på höjden h och med tjockleken Δh är emellertid densiteten nästan konstant och massan är därför lika med densiteten gånger skivans volym (som är $A \cdot \Delta h$), alltså skivans massa är

$$a\, e^{-\beta h} \cdot A\Delta h .$$

Summan av massorna av alla sådana skivor, dvs hela luftpelarens massa, är därför

$$\int_0^H a\, e^{-\beta h} A dh .$$

Övningsuppgifter

Kap. 2.1 (Integraldefinitionen)

Övningarna nedan är avsedda att öva förståelse för betydelsen av uttrycken

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ och $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (CJ sid. 125) .

Övning 3. Låt $f(x) = 1 + x$ i intervallet $[0,2]$. Beräkna

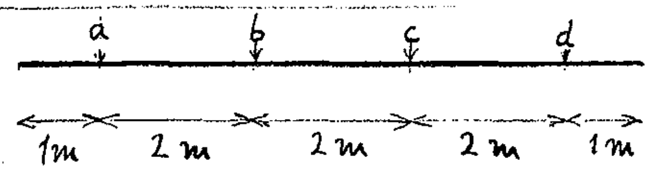
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \quad \text{och} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

för $n = 4$ och $n = 8$ då $x_0 = 0$, $x_n = 2$ och $x_1,\ldots,x_{n-1}$ delar intervallet $[0,2]$ i n lika delar, dvs $x_i = i2/n$, $i = 0,1,\ldots,n$. Försök finna uttryck för S_n och s_n för godtyckligt n . Vad kan man säga om skillnaden $S_n - s_n$ då $n \to \infty$. (Jfr CJ sid. 129–130.)

Övning 4. Låt $f(x) = x^2$ på $[0,2]$. Låt x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, samt S_n och s_n vara definierade som i föregående uppgift. Beräkna S_2, s_2, S_4 och s_4 . (Jfr CJ sid. 130.)

Övning 5. Sätt $f(x) = 2^{-x}$ på $[0,1]$, låt $x_i = i/n$, $i = 0,1,\ldots,n$ och definiera s_n som i uppgift 1. Beräkna s_4 , s_{10} och s_{100} . (Observera att den geometriska serien kan summeras. Använd räknedosa för att beräkna värdet av $n(1 - 2^{-1/n})$ för olika n .)

Övning 6. En metalltråd är tillverkad av ett material med (rymd-)densiteten $\rho = 7.6 \cdot 10^3$ kg/m^3 . Trådens tvärsnittsyta är överallt cirkulär, men tjockleken varierar. För ett 8 meter långt trådstycke uppmätte man tjockleken på fyra ställen såsom i figuren. Beräkna ett approximativt uttryck för trådens massa. (Obs! olika svar möjliga.)



a:	12 mm	c:	16 mm
b:	15 mm	d:	13 mm

Övning 7. a) Genom ett avloppsrör strömmar vatten med en hastighet som varierar i tiden. Man vill uppskatta den totala vattenvolym som strömmar genom röret under ett dygn. Låt oss kalla denna kvantitet för U . Man mätte vattnets strömningshastighet var sjätte timme och fick följande värden:

Tid (timmar)	0	6	12	18
Strömningshastighet liter/minut)	20	31	26	22

Ange med hjälp härav en uppskattning av U .

b) Samma situation som i a), förutom att strömningshastigheten mätes var tredje timme, varvid följande värde erhålls:

Tid (timmar)	0	3	6	9	12	15	18	21
Strömningshastighet (liter/minut)	20	24	30	28	27	26	23	22

Beräkna med hjälp av dessa data en uppskattning av U .

Övning 7'. Hastigheten hos en bil mättes under tidsintervallet $0 \le t \le 60$ sekunder med en noggrann hastighetsmätare, och mätresultaten registrerades i ett diagram med en skrivare (fig. 1) . Beräkna den vägsträcka som bilen färdats under tidsintervallet genom att räkna rutor i diagrammet.

Kap. 2.3. Reglerna (4), (6), (7) och (8) i CJ kap. 2.3 a och b är givetvis mycket viktiga (jfr NE del 2, kap. 2.3). Vi ger dock övningar endast på 2.3 d .

Exempel 5. Beräkna medelvärdet av $f(x) = x + 2$ över intervallet $[1,5]$ och ange ett tal ξ för vilket funktionen antar detta värde.

Lösning. Medelvärdet μ definieras som (CJ sid. 141)

$$\mu = \frac{1}{5-1} \int_1^5 f(x)dx .$$

Integralen kan i detta fall lätt beräknas (CJ sid. 129-130 och 136)

$$\int_1^5 (x+2)dx = \int_1^5 xdx + \int_1^5 2dx = (5^2-1^2)/2 + (5-1)2 = 20 ,$$

alltså är $\mu = 20/4 = 5$. Vi söker således ett ξ för vilket $f(\xi) = 5$ dvs $\xi + 2 = 5$. Vi kan således ta $\xi = 3$.

Likheten $\mu = f(3)$, dvs

$$\int_1^5 f(x)dx = (5-1)f(3)$$

kan i exemplet tolkas geometriskt som att de två areorna nedan är lika.

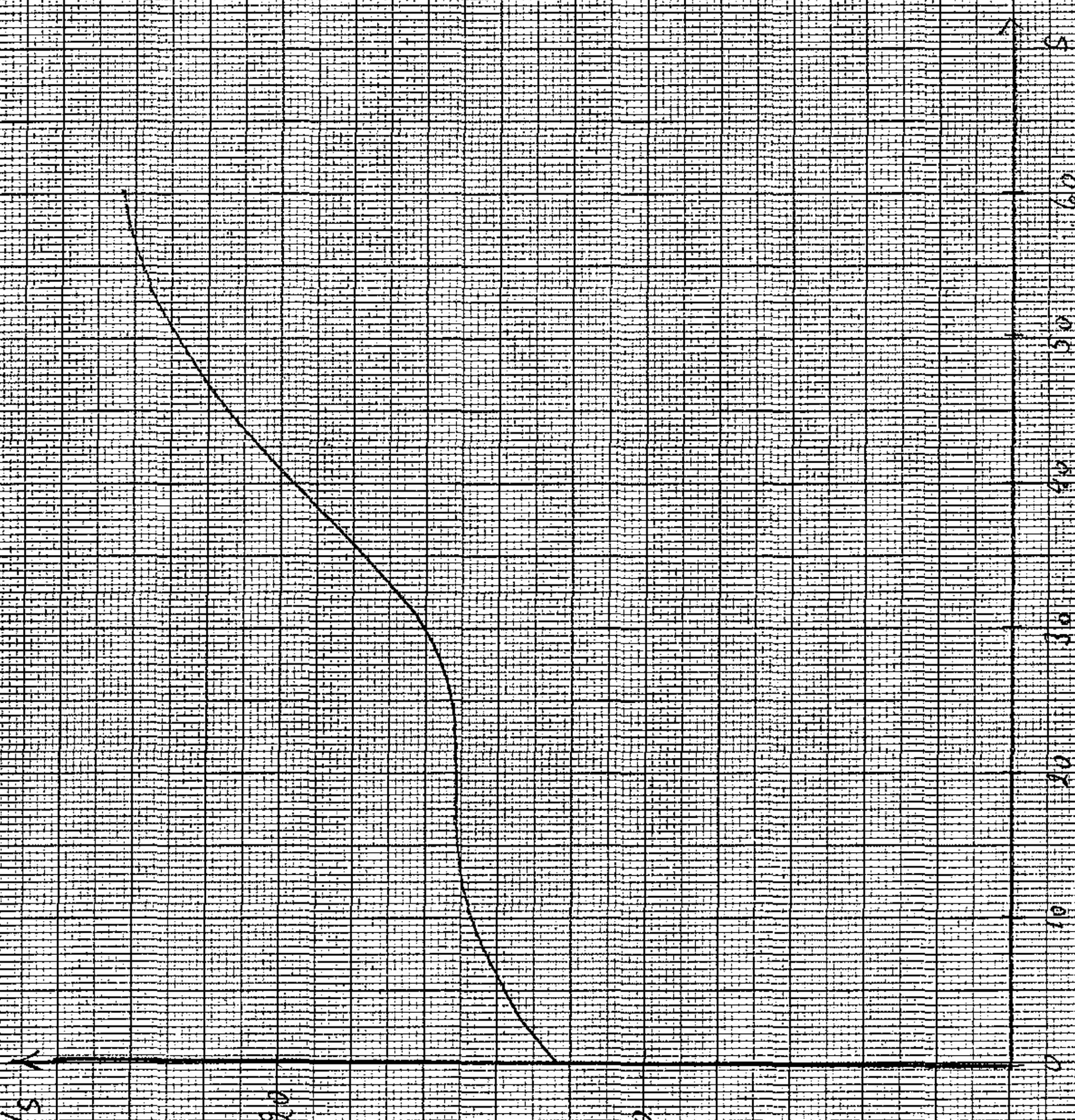
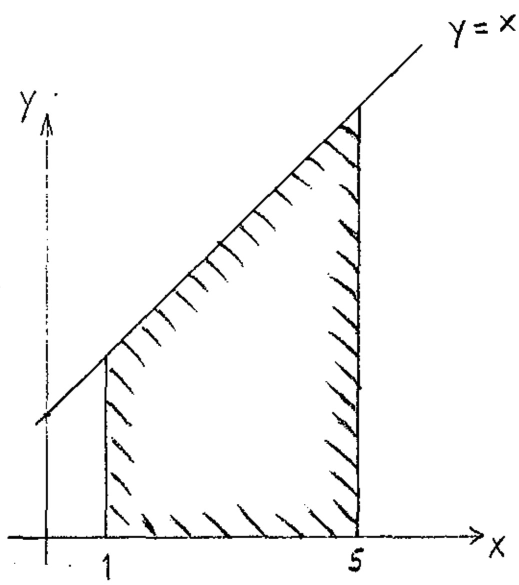
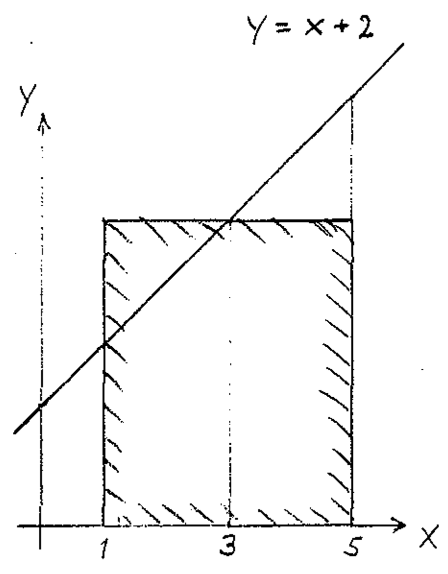


Fig. 1





I nedanstående övningar förutsätts bekant att

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \quad \text{för} \quad n = 0,1,2 \ .$$

(Formeln gäller i själva verket för godtyckligt reellt $n \neq -1$.)

Övning 8. I vart och ett av nedanstående exempel beräkna medelvärdet av $f(x)$ över $[a,b]$ och ange ett tal ξ för vilket funktionen antar detta värde.

a) $f(x) = 4x - 1$, $a = 1$, $b = 3$

b) $f(x) = x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 1$

c) $f(x) = (x+1)^2$, $a = -4$, $b = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{för} \quad 0 \leq x \leq 2 \ , \\ 2x - 2 & \text{för} \quad 2 < x \leq 4 \ , \end{cases}$ $a = 0$, $b = 4$. (Är $f(x)$ kontinuerlig?)

Kap. 2.4. En obestämd integral är en funktion som man får genom att låta övre gränsen i en bestämd integral variera. Det är då naturligt att beteckna den övre gränsen med x .

Exempel 6. Låt $f(x) = 2x + 1$. Beräkna de obestämda integralerna

$$\phi_1(x) = \int_0^x f(u)du \quad \text{och} \quad \phi_2(x) = \int_1^x f(u)du \ .$$

Lösning. Vi får $\phi_1(x) = \int_0^x (2u+1)du = 2[u^2/2]_0^x + [u]_0^x = x^2 + x$. På analogt sätt får vi $\phi_2(x) = x^2 + x - 2$.

Observera att man brukar föredra skrivsättet $\int_a^x f(u)du$ framför $\int_a^x f(x)dx$, eftersom x förekommer i två olika betydelser i den senare formeln .

Övning 9. Låt $f(x) = 2 - 3x$. Beräkna de obestämda integralerna

$$\phi_1(x) = \int_{-2}^{x} f(u)du \ , \quad \phi_2(x) = \int_{0}^{x} f(u)du \ ,$$

$$\text{och} \quad \phi_3(x) = \int_{3}^{x} f(u)du \ .$$

Övning 10. Verifiera att skillnaden mellan två av de olika obestämda integralerna i föregående övning alltid är en konstant funktion, dvs var och en av funktionerna $\phi_1(x) - \phi_2(x)$, $\phi_1(x) - \phi_3(x)$ och $\phi_2(x) - \phi_3(x)$ är konstant.

Övning 11. Låt $f(x) = x^2 - x - 4$.

a) Beräkna de obestämda integralerna

$$\phi_1(x) = \int_{0}^{x} f(u)du \quad \text{och} \quad \phi_2(x) = \int_{-2}^{x} f(u)du$$

(verifiera att $\phi_2(x) - \phi_1(x)$ är konstant, jfr föregående övning) .

b) Bestäm ett tal a så att den obestämda integralen

$$\phi(x) = \int_{a}^{x} f(u)du$$

uppfyller $\phi(1) = 0$.

Övning 12. Sätt $f(x) = 1$ för $x \leq 0$, $f(x) = x + 1$ för $x > 0$.

a) Beräkna

$$\int_{-1}^{1} f(u)du$$

Ledning. Utnyttja att

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = \int_{-1}^{0} f(u)du + \int_{0}^{1} f(u)du$$

b) Beräkna ett uttryck för den obestämda integralen

$$\phi_1(x) = \int_{-1}^{x} f(u)du \ , \quad x \in R \ .$$

Ledning. $\phi(x)$ måste anges med olika formler för olika x-värden.

c) Beräkna på analogt sätt som i (b) ett uttryck för den obestämda integralen

$$\phi_2(x) = \int_0^x f(u)du \ , \quad x \in R \ .$$

Verifiera att $\phi_2(x) - \phi_1(x)$ är konstant på hela R .

Kap. 2.5. Den s.k. naturliga logaritmfunktionen betecknas i CJ med "log" såsom är brukligt i matematisk litteratur. Här skall vi ansluta oss till detta beteckningssätt.

Det finns flera olika sätt att definiera log-funktionen. De olika sätten är ekvivalenta i den meningen att de leder till samma funktion. Skillnaden är att en egenskap som är definition i den ena framställningen blir en sats som måste bevisas i den andra framställningen och tvärtom. Det är dock nödvändigt att hålla reda på vad som är definition och vad som är sats i den text man studerar, ty annars kan man inte vinna förståelse för hur logaritmfunktionens olika egenskaper hänger samman logiskt. I CJ definieras log-funktionen genom formeln (sid. 145)

$$(10) \qquad \log x = \int_1^x \frac{1}{u} du \ , \qquad x > 0 \ .$$

Avsnitt 2.5 behandlar härledning av de kända räknelagarna för log-funktionen. Observera att själva poängen här är att räknelagarna visas vara logiska konsekvenser av definitionen (10) . Vid bevisen måste man givetvis använda räknelagar för bestämda integraler, som ju tidigare bevisats. Vi ger nu några övningar som har samband med härledningarna i kap. 2.5 .

Övning 13. Beräkna ett approximativt värde på $\log 2$ genom att rita kurvan $y = 1/x$ på millimeterpapper och räkna rutor under kurvan. Kontrollera resultatet med räknedosa eller tabell.

Övning 14. Visa t.ex. genom lämpliga skalförändringar på koordinataxlarna, att de areor som representeras av integralerna

$$\int_1^3 \frac{du}{u} \quad \text{och} \quad \int_2^6 \frac{du}{u}$$

är lika. (Rita upp kurvorna på rutat papper!)

b) Visa på samma sätt att

$$\int_1^a \frac{du}{u} = \int_2^{2a} \frac{du}{u}$$

för godtyckliga $a > 1$.

c) Det är klart att man på samma sätt som i b) kan inse att

$$\int_1^a \frac{du}{u} = \int_b^{ab} \frac{du}{u}$$

för godtyckliga $a,b > 1$. Visa med hjälp härav att $\log (ab) = \log a + \log b$ för godtyckliga $a,b \geq 1$ (se CJ sid. 147) .

Övning 15. a) Visa på analogt sätt som i Övning 14 a) att $\log(1/2) = - \log 2$, dvs att

$$\int_{1/2}^{1} \frac{du}{u} = \int_1^2 \frac{du}{u} .$$

b) Visa på samma sätt att $\log(1/a) = - \log a$ för godtyckligt $a \geq 1$.

c) Visa att man kan härleda formeln

$$\log (\tfrac{1}{6}) = \log (\tfrac{1}{2}) + \log (\tfrac{1}{3})$$

ur formeln

$$\log 6 = \log 2 + \log 3$$

och resultatet i Övning 15 b.

d) Visa på analogt sätt att formeln

$$\log (ab) = \log a + \log b$$

för godtyckliga $a,b > 0$ följer av resultaten i Övning 14 c och 15 b. (Jfr CJ sid. 148.)

Sektion 2.6. Beviset för att $\log e = 1$ på sidan 149 i CJ bygger på att man vet att $(1 + \frac{1}{n})^n$ är mycket nära e om n är stort (enligt definitionen av e) , och att man visar att $\log(1 + \frac{1}{n})^n$ är mycket nära 1 om n är stort.

Övning 16. Beräkna $(1 + \frac{1}{100})^{100}$ med kalkylator. Jämför med värdet av e enligt kalkylatorn. Verifiera (såsom i CJ sid. 149) att

$$\log\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 100\int_1^{1+\frac{1}{100}} \frac{du}{u} .$$

Visa att högra ledet måste ligga mellan $100/101$ och 1 .

Övning 17. a) Låt f vara en funktion och g dess invers. Antag att man vet att $f(2) = a$, $f(3) = b$ och $f(6) = a + b$. Verifiera att det följer härav att

$$g(a+b) = g(a)\cdot g(b) .$$

b) Vi vet enligt CJ sid. 147 att

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

för godtyckliga $x, y > 0$. Vidare är funktionen $e^x = g(x)$ definierad som inversa funktionen till $f(x) = \log x$. Visa att det följer av dessa fakta att

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

för godtyckliga $x,y \in R$.

Ledning. Beteckna $\log x$ med a och $\log y$ med b och resonera precis som i a).

Övning 18. Visa genom att utnyttja definitionerna av e^x och $\log x$ i CJ att

$$3^2 = e^{2 \log 3}$$

(Jfr CJ sid. 152.)

Övning 19. a) Visa genom att approximera arean under kurvan $y = 1/x$ med lämpligt valda rektanglar att

$$\log 5 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1 + \log 5 .$$

b) Visa på analogt sätt att

$$\log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

för varje heltal $n \geq 2$. Ange med hjälp härav ett approximativt värde på summan

$$\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{k} .$$

Kap. 2.8. I avsnittet 2.8, som handlar om derivator, är intresset fokuserat på definitionen av begreppet derivata, och detta begrepps matematiska och fysikaliska betydelse. Frågan om hur man beräknar formeluttryck för derivatan av en funktion som är definierad genom en formel, behandlas inte förrän i kapitel 3. Vi ger här några övningar på derivatbegreppets geometriska och fysikaliska betydelse.

Övning 20. a) Under en bilfärd antecknade man vägmätarställningen var 10:e sekund. Man erhöll följande värden (t = tid i sekunder, s = vägmätarställning i km)

t	0	10	20	30
s	345.10	345.34	345.59	345.83
t	40	50	60	
s	346.06	346.29	346.53	

Vad var bilens medelhastighet under tidsintervallet? Försök även uppskatta bilens hastighet vid tiden $t = 20$ och vid $t = 40$. Rita en kurva över s som funktion av t. Kan man dra några slutsatser av kurvan angående hastighetens variation med tiden?

b) Samma uppgift som i (a) förutom att de avlästa värdena är som nedan

t	0	10	20	30
s	712.25	712.39	712.55	712.73
t	40	50	60	
s	712.92	713.13	713.33	

c) Samma uppgift som i (a) förutom att de olika avlästa värdena är

t	0	10	20	30
s	156.12	156.45	156.72	156.92
t	40	50	60	
s	157.04	157.09	157.10	

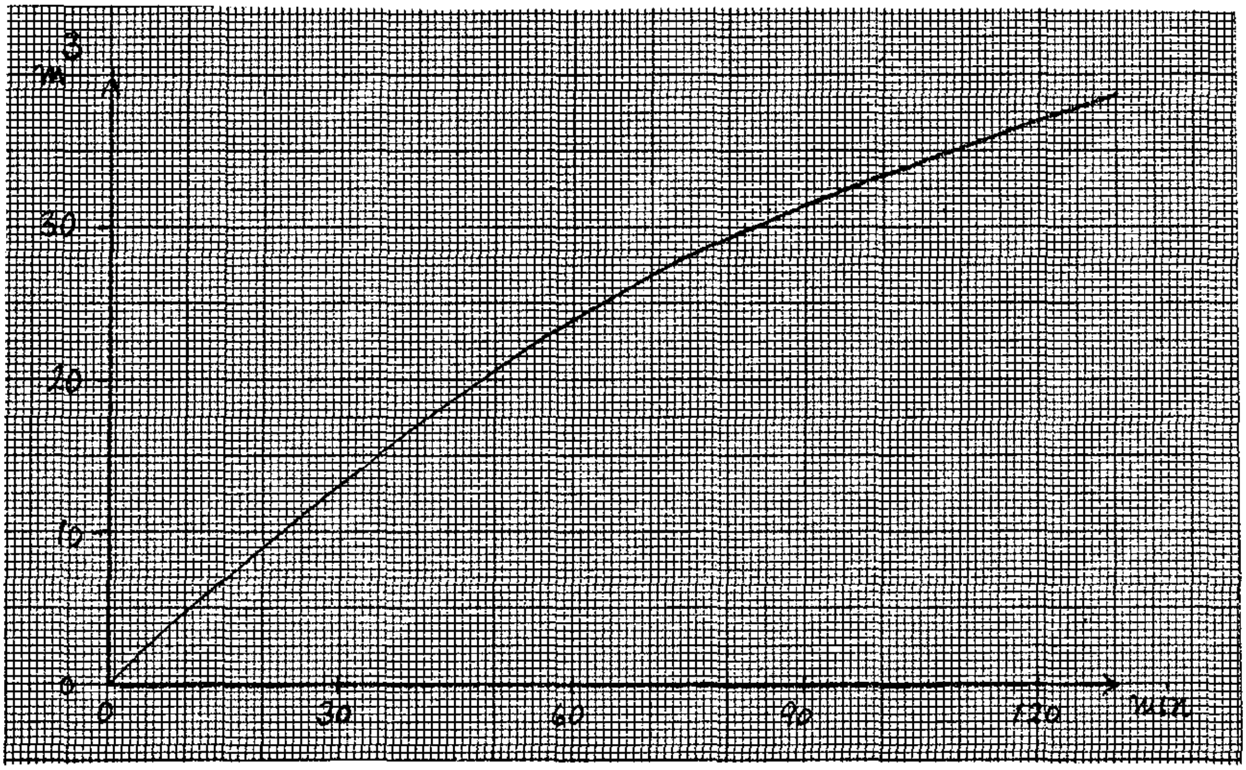
Övning 21. Betrakta funktionen $f(x) = 1/x$. Välj $x_0 = 2$ och beräkna differenskvoterna

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

för några värden på h, exempelvis för $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001$, och 0.0001. Upprita kurvan $y = 1/x$ och uppskatta lutningskoefficienten för tangenten i punkten $x = 2$, $y = 1/2$. Verifiera att de beräknade värdena på differenskvoten åtminstone för små h överensstämmer väl med lutningskoefficienten för tangenten.

Övning 22. Analog uppgift som i Övning 21, men för funktionen $f(x) = \cos x$ och $x_0 = \pi/6$.

Övning 23. En bassäng fylls med vatten genom en vattenledning. Vattenvolymen i bassängen mäts vid täta tidpunkter under tiden $0 \leq t \leq 120$ minuter, och ett diagram över vattenvolymen som funktion av tiden uppritas (se fig.). Uppskatta med hjälp av kurvan hur stor vattenföringen i ledningen (volym per tidsenhet) är vid tiden $t = 30$ och $t = 90$ minuter. Uppskatta även medelvattenföringen för tidsintervallen $0 \leq t \leq 60$, och för $60 \leq t \leq 120$ samt för hela tidsintervallet $0 \leq t \leq 120$.



Övning 24. En elektrisk anläggning förbrukade en elektrisk effekt som varierade i tiden. Man önskade mäta effekten vid olika tidpunkter, men det enda tillgängliga instrumentet var en mätare för energiförbrukning. Under en period av fem minuter avläste man mätaren sex gånger och erhöll därvid följande värden (kWh = kilowattimmar):

tid t (minuter)	0	1	2	3	4	5
energiförbrukning kWh	167.1	175.8	183.9	191.7	198.9	205.5

Rita en kurva över energiförbrukningen som funktion av tiden. Beräkna medeleffektförbrukningen under den första av de fem minuterna, samt medeleffektförbrukningen under hela tidsperioden. Uppskatta med hjälp av kurvan effektförbrukningen vid tidpunkten $t = 1$.

Övning 25. En kropp faller fritt under inverkan av luftmotståndet. Antag att kroppens hastighet v vid tiden t är

$$v = 50\,\frac{1 - e^{-0.8t}}{1 + e^{-0.8t}} = f(t).$$

Gör en uppskattning av accelerationen (retardationen) vid tidpunkterna $t = 0$ och $t = 1$. (Ledning: Beräkna med hjälp av räknedosa differenskvoten $(f(t+h) - f(t))/h$ för värden på h som du själv bestämmer.)

Svar kap. 2

1. 17.2 g

2. 48.0 g

3. $S_4 = 9/2$, $s_4 = 7/2$; $S_8 = 17/4$, $s_8 = 15/4$;
$S_n = 4 + (2/n)$, $s_n = 4 - (2/n)$; $S_n - s_n = 4/n \to 0$ då $n \to \infty$.

4. $S_2 = 5$, $s_2 = 1$; $S_4 = 15/4$, $s_4 = 7/4$; $S_8 = 51/16$, $s_8 = 35/16$

5. $s_n = \dfrac{1}{2n(1-2^{-1/n})}$, varav
$s_4 = 0.7857$, $s_{10} = 0.7466$, $s_{100} = 0.7239$,
$(\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 2^{-x} dx = 1/(2 \ln 2) = 0.7213$

6. 9.4 kg

7. a) 35640 liter
b) 36000 liter

7'. 1070 m

8. a) 2
b) $1/\sqrt{3}$
c) $-1 - \sqrt{7/3}$
d) $9/4$

9. $\phi_1(x) = 2x - \frac{3}{2} x^2 + 10$
$\phi_2(x) = 2x - \frac{3}{2} x^2$, $\phi_3(x) = 2x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{15}{2}$

11. a) $\phi_1(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x$, $\phi_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{10}{3}$
b) $a = 1$

12. a) $5/2$
b) $\phi_1(x) = x + 1$ för $x \leq 0$, $\phi_1(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$ för $x > 0$.
c) $\phi_2(x) = x$ för $x \leq 0$, $\phi_2(x) = \frac{x^2}{2} + x$ för $x > 0$.

20. a) 86 km/tim ; 88 km/tim ; 83 km/tim
b) 65 km/tim ; 61 km/tim ; 72 km/tim
c) 59 km/tim ; 85 km/tim ; 34 km/tim

21. Differenskvoterna för h = 1, 0.1, 0.001, 0.001, 0.0001
är -0.167, -0.238, -0.249, -0.250, -0.250 resp.

22. T.ex. $h = 0.01$ ger -0.504

23. Vattenföringen: 0.40 resp. 0.21 m^3/min ;
Medelvattenföringen: 0.40, 0.22 resp. 0.31 m^3/min

24. 522 kW , 460.8 kW , ca 500 kW

25. 20 resp. 17

KAPITEL 3

Kap. 3.1

Övning 1. Beräkna derivatan av följande funktioner

a) $2x^3 - 7x$

b) $x^{10} - 5x^7$

c) $1/x^2$

d) $(x-1)/(x-2)$

e) $x/(1+x)^2$

f) $x/(x^2+1)$

g) $\dfrac{(x^2 - \sqrt{6}x + 3)(x^2 + \sqrt{6}x + 3)}{x^4 + 9}$

Övning 2. Beräkna derivatan av följande funktioner

a) $2 \sin x \cos x$

b) $x^2 \cos x$

c) $1/(1 + \tan^2 x)$

d) $(\sin x)/x$

e) $(x \sin x)/(1 + \cos x)$

Övning 3. Beräkna värdet av tionde derivatan för $x = 0$ av funktionen

a) x^9

b) x^{10}

c) x^{11}

Övning 4. Sätt $f(x) = x \cos x$ och $g(x) = x^2 \cos x$.
Beräkna

a) $\left.\dfrac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=0}$

b) $\left.\dfrac{d^4g}{dx^4}\right|_{x=0}$

Kap. 3.2 a, b

Regeln för sambandet mellan derivatorna för en funktion f och dess inversa funktion ϕ formuleras på sidan 207 i CJ (NE del 2, kap. 9.9). Regeln kan formuleras så

$$\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} , \qquad (1)$$

om x_0 och y_0 är motsvarande punkter, dvs $y_0 = f(x_0)$.

Exempel 1. Sätt $f(x) = x^2 + 2x$, $D_f = [0,2]$, och låt ϕ vara inversa funktionen till f .

a) Beräkna $\phi'(3)$ med hjälp av formeln (1) .

b) Beräkna ett uttryck för funktionen $\phi(y)$, och kontrollera resultatet i (a) genom derivation.

Lösning. a) Här är $y_0 = 3$. Av $f(x_0) = x_0^2 + 2x_0 = y_0$ får vi $x_0 = 1$ ($x_0 = -3$ förkastas, eftersom $-3 \notin D_f$) . Derivation ger $f'(x) = 2x + 2$, alltså $f'(1) = 4$, således enligt formeln (1)

$$\phi'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4} .$$

b) Av $y = x^2 + 2x$ får vi $x = -1 \pm \sqrt{1+y}$. Eftersom $D_f = [0,2]$ väljer vi +tecknet, alltså $\phi(y) = \sqrt{1+y} - 1$, $D_\phi = V_f = [0,8]$. Derivation ger

$$\phi'(y) = \frac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{2}}$$

alltså $\phi'(3) = 1/4$.

Övning 5. Sätt $f(x) = x^2$, $D_f = \{x;\ x > 0\}$. Beräkna inversa funktionen $\phi(y)$. Låt $x_0 = 2$, $y_0 = f(x_0) = 4$. Beräkna $f'(x_0)$ och $\phi'(y_0)$ och verifiera att formeln (1) stämmer i detta fall.

Övning 6. Sätt $f(x) = x^3 + 4x$, $D_f = [0,2]$, och låt ϕ vara den inversa funktionen till f . Ange definitionsmängden D_ϕ. Beräkna $\phi'(5)$.

Övning 7. Sätt $f(x) = 2x \tan x$, $D_f = \{x;\ 0 \leq x < \pi/2\}$, och låt ϕ vara den inversa funktionen till f . Ange definitionsmängden D_ϕ, och beräkna $\phi'(\pi/2)$.

Övning 8. Sätt $f(x) = x^7$, $x \geq 0$, låt $g(y)$ vara inversa funktionen till f , dvs $g(y) = y^{1/7}$, $y \geq 0$. Beräkna derivatan $g'(2)$ genom att resonera som i CJ Kap. 3.2 b . Med andra ord, formeln $f'(x) = 7x^6$ får förutsättas bekant liksom formeln (1) för derivatan till en invers funktion, däremot inte formeln för derivatan av x^α , $\alpha \neq$ heltal.

Kap. 3.2 c, d

Svårigheten vid definition av arcussinusfunktionen (arccos, arctan etc.) är ju att ekvationen $y = \sin x$ har mer än en lösning x (i själva verket oändligt många) för givet värde på y i intervallet $-1 \leq y \leq 1$. Det i litteraturen vanligaste förfarandet är att man betraktar funktionen $f(x) = \sin x$ med definitionsmängd $D_f = [-\pi/2, \pi/2]$ och definierar arcussinusfunktionen som inversa funktionen till f (NE del 2, kap. 9.10, Brandell m.fl., Matematik för naturvetare, del I sid. 136). Observera att f är omvändbar, eftersom $\sin x$ är strängt växande på $[-\pi/2, \pi/2]$. På analogt sätt definierar man arcuscosinusfunktionen som inversen till funktionen $g(x) = \cos x$ med definitionsmängd

$D_g = [0,\pi]$, och arctan-funktionen som inversen till $h(x) = \tan x$, $D_h = \{x; -\pi/2 < x < \pi/2\}$. I Sverige används numera konsekvent denna terminologi. Observera emellertid att CJ använder en annan terminologi. Här betecknar arcsin x vilken som helst av de oändligt många "grenar" (eng. "branch"; se CJ sid. 211) som kan erhållas genom inversion av funktionen sin x på något intervall där denna är monoton. Den funktion som enligt nyssnämnda (dvs vår) terminologi betecknas med arcsin x kallas i CJ för "huvudgrenen" (eng. "principal value") av arcsin x .

Övning 9. Beräkna

a) $\arcsin(1/2)$

b) $\arcsin(-1)$

c) $\arccos(-1/2)$

d) $\arctan 1$

e) $\arcsin(\sin \frac{\pi}{2})$

f) $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{2})$

g) $\arccos(\cos - \frac{\pi}{4})$

Exempel 2. För vilka x gäller

a) $\sin(\arcsin x) = x$

b) $\arcsin(\sin x) = x$.

Lösning. Likheten a) gäller för alla x för vilka vänstra ledet är definierat, dvs för $-1 \leq x \leq 1$ (tänk efter varför). I likheten b) är bägge leden definierade för alla reella x ; likheten är däremot inte alltid sann (se Övn. 9 f, g). Likheten är sann för $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ på grund av definitionen av arcsin x , falsk för övriga x eftersom värdemängden för arcsin är $[-\pi/2,\pi/2]$.

Övning 10. För vilka x gäller

a) $\arccos(\cos x) = x$

b) $\cos(\arccos x) = x$

c) $\arctan(\tan x) = x$

Övning 11. För vilka x gäller

a) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

b) $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$

Övning 12. Beräkna derivatan av funktionerna

a) $x \arctan x$

b) $(\arcsin x)(\arccos x)$

c) $\frac{1 + \arctan x}{1 - \arctan x}$

Kap. 3.2 e

Övning 13. Beräkna derivatan av funktionerna

a) x^2e^x

b) $x^2 \log x$

c) $e^x \log x$

d) $x (\log x - 1)$

e) $\sqrt{x} \cos^2 x$

f) $x^2e^x \sin x$

Övning 14. Beräkna 6:e derivatan i $x = 0$ för funktionen

a) e^x

b) xe^x

c) x^6e^x (Ledning: Använd Leibnitz formel, CJ sid. 203)

d) x^5e^x

e) x^7e^x

Kap. 3.3

Kedjeregeln, dvs formeln för derivatan av en sammansatt funktion, kan exempelvis skrivas (CJ sid. 218, NE del 2 kap. 9.4)

$$f'(x) = g'(\phi(x))\phi'(x) \; ; \tag{2}$$

här betecknar $f(x)$ den sammansatta funktionen $f(x) = g(\phi(x))$

Exempel 3. Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \sin (x^2)$$

Lösning. Sätt $\phi(x) = x^2$ och $g(y) = \sin y$ varvid $f(x)$ blir $\sin (x^2)$, och använd (2). Man får $\phi'(x) = 2x$, $g'(y) = \cos y$, $g'(\phi(x)) = \cos(x^2)$, och således

$$f'(x) = 2x \cos (x^2) .$$

Exempel 4. Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = (x^3 + 1)^5 .$$

Lösning. Sätt $\phi(x) = x^3 + 1$ och $g(y) = y^5$. Man får $\phi'(x) = 3x^2$, $g'(y) = 5y^4$, och $f'(x) = 5(x^3 + 1)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3 + 1)^4$.

Övning 15. Beräkna derivatan av var och en av funktionerna

a) e^{x^2}

b) $e^{\sin x}$

c) $1/(1 + x)$

d) $\log \sin x$

e) $(x^2 + 2x)^4$

f) $e^{\sqrt{x}}$

g) $\sqrt[3]{\log x}$

h) $1/(1 + x^2)^2$

i) $\sqrt{1 + x^2}$

j) $\sin^3 x$

k) $\sin^3 2x$

l) $\log (\sin 3x)$

m) $\sqrt{1 + \sin^2 x}$

n) $e^{\sin^2 x}$

o) $\log (x + \sqrt{1 + x^2})$

p) x^x (Ledning: använd likheten $x^x = e^{x \log x}$)

q) $x^{\sin x}$

Kap. 3.4

Huvudinnehållet i avsnitt 3.4 är följande matematiska utsaga och fysikaliska tillämpningar av denna (CJ sid. 223).

> Om en funktion $y = f(x)$ satisfierar differentialekvationen $y' = \alpha y$ (α = konstant), så måste funktionen vara en exponentialfunktion av formen
>
> $y = Ce^{\alpha x}$
>
> för någon konstant C .

En viktig poäng är att utsagans riktighet är en logisk följd av definitionerna av derivata och av exponentialfunktionen; beviset står nederst på sidan 223 i CJ.

Vi ger några övningar på exponentialfunktionens fysikaliska tillämpningar.

Övning 16. Ett prov innehåller 1 gram radium vid en viss tidpunkt. Efter 10 år innehåller provet 0.997 gram radium. Efter hur lång tid har radiumkvantiteten minskat till 0.5 gram?

Övning 17. Under gynnsamma omständigheter är tillväxthastigheten hos en bakteriekultur i varje ögonblick proportionell mot kulturens storlek i det ögonblicket. Tillväxten som funktion av tiden kommer i så fall att beskrivas av en exponentialfunktion (varför?).

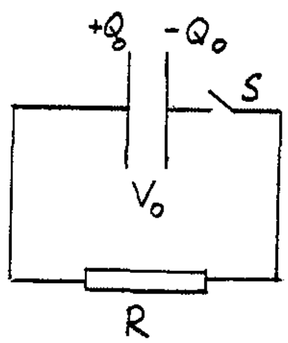
a) Antag att en viss bakteriekultur ökar i storlek med en tredjedel på en timme, hur lång tid krävs i så fall för att kulturens storlek skall öka med en faktor 1000.

b) Under antagande att bakteriekulturen i a) obehindrat fortsätter att växa i enlighet med de gjorda antagandena, hur länge skulle det i så fall dröja innan bakteriekulturen täckte hela jordens yta med ett 1 meter tjockt lager, om kulturens volym från början är en kubikmillimiter. Jordradien är ca 6400 km.

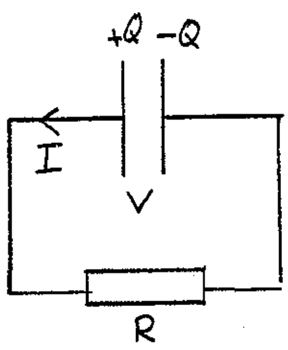
Övning 18. Kolisotopen C^{14} har halveringstiden 5570 år. Om halten av C^{14} i skelettet hos en viss djurart har det kända värdet A (vikt/volymsenhet) hur gammalt är ett fossil av samma art för vilket halten av C^{14} har uppmätts till $A/3$.

Övning 19. En stor kondensator urladdas genom läckage av elektricitet. Spänningen över kondensatorn kan då antas variera med tiden som en exponentialfunktion. Genom mätning fann man att spänningen sjönk till $1/4$ av utgångsvärdet på 5 minuter. Hur lång tid håller kondensatorn minst 90 % av utgångsvärdet?

Urladdning av kondensator, ett exempel på differentialekvation av typen $y' = \alpha y$ (CJ sid. 223)



En kondensator är uppladdad till spänningen V_0 . På kondensatorns två belägg finns då laddningen $+Q_0$ resp. $-Q_0$. Sambandet mellan Q_0 och V_0 ges av $Q_0 = CV_0$ där C är kondensatorns kapacitans. Vid tiden $t = 0$ slås strömbrytaren S till. Kondensatorn urladdas då genom motståndet med resistansen R . Hur kommer kondensatorns spänning V och strömmen I



att variera i tiden. Vi skall alltså bestämma funktionerna $V = V(t)$ och $I = I(t)$.

Ohms lag ger $V = RI$ (1) men det räcker inte för att bestämma $V(t)$ och $I(t)$. Finns det något mer samband mellan V och t . Ja, så här kan man göra.

$Q = CV$ (2) gäller alltid. Men nu fick vi ju en storhet till nämligen Q , förargligt. Men det finns ett samband mellan Q och I . När strömmen I flyter <u>minskar</u> laddningen Q . Betrakta ett "litet" tidsintervall dt . På detta tidsintervall passerar laddningen Idt ett tvärsnitt av ledningen. Denna lilla laddning som passerar måste motsvaras av en <u>minskning</u> av laddningen Q på den positiva plattan:

minskningen $-dQ = Idt$ $\qquad I = -\frac{dQ}{dt}$ (3)

Vi sammanfattar

$V = RI$ (1) (Ohms lag)

$Q = CV$ (2) (enligt def på kapacitans)

$I = -\frac{dQ}{dt}$ (3) (samband mellan I och Q)

Derivera (2) : $\frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} = -I$

$I = -C\frac{dV}{dt}$ insättes i (1)

$$V = -RC\frac{dV}{dt} \quad (4)$$

<u>Uppgifter</u>

1) Tänk igenom vilka av följande storheter som är variabler och vilka som är konstanter

V_0, V, Q, Q_0, I, C, R

2) Lös diff.ekvationen (4) med begynnelsevillkoret $V = V_0$ för $t = 0$

3) Beräkna $I = I(t)$

4) Hur lång tid tar det för spänningen att sjunka till $\frac{1}{2} V_0$ om $C = 10^{-6}$ F och $R = 10^7 \ \Omega$?

Kap. 3.6

Centrala begrepp i detta avsnitt är maximum (minimum) och lokalt maximum (lokalt minimum) för en funktion (CJ sid. 238; "lokalt maximum" kallas i CJ för "relative maximum"). I NE behandlas endast begreppet lokalt maximum och kallas där för "maximum" (del 2 kap. 7.2). För att framhäva att man avser maximum och inte lokalt maximum använder man ofta termen absolut maximum. Slutligen kan man kalla en funktions absoluta maximum för funktionens största värde.

Grundvalen för differentialkalkylens tillämpning på maximi- och minimiproblem är följande faktum (CJ sid. 240, NE del 2 kap. 7.2):

> Om ξ är en inre punkt i D_f och lokal maximi- eller minimipunkt för f och f är deriverbar i ξ, så är $f'(\xi) = 0$.

Härav följer att om en funktion, vars definitionsmängd är ett intervall $[a,b]$, är deriverbar i hela intervallet, så måste funktionen anta sitt största (minsta) värde antingen i något av derivatans nollställen eller i någon av intervallets ändpunkter a eller b .

Observera emellertid att en funktion vars definitionsmängd är av annat slag (t.ex. ett oändligt intervall) inte alltid har något största värde (exempel: $f(x) = 1 - (1/x)$, $x \geq 1$).

Exempel 5. Sök största och minsta värde för funktionen

$$f(x) = 2x - x^2 \ , \ 0 \leq x \leq 3$$

Lösning. Derivation ger $f'(x) = 2 - 2x$. Av $f'(x) = 0$ får vi $x = 1$, $f(1) = 1$. Vidare $f(0) = 0$, $f(3) = -3$. Funktionens största och minsta värden måste finnas bland talen 1, 0 och -3 . Största värdet är således 1, minsta värdet -3 .

Övning 20. Sök största och minsta värde för var och en av funktionerna nedan, och skissera funktionskurvan.

a) $x^3 - 3x$,	$0 \leq x \leq 2$	d) xe^{-x} ,	$x \geq 0$
b) $x^4 - 4x^3$,	$x \in R$	e) x^x ,	$x > 0$
c) $\sqrt{x}(1 - x)$,	$0 \leq x \leq 1$	f) $x^2/(1 + x^3)$,	$x \geq 0$.

Övning 21. Sök alla lokala extrempunkter och skissera funktionskurvan för nedanstående funktioner

a) $4x - x^2$

b) $x^3 + 3x^2$

c) $x/(x - 1)$

d) $x^2/(x - 2)$

e) $(x - 1)^2/(x^2 + 1)$

f) $\dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

g) $|x|$

h) $e^{-|x|}$

i) $x^2 - 2|x|$

Övning 22. En rektangulär lekplats skall inhägnas med ett 120 m långt staket. Hur stor är lekplatsens maximala area?

Övning 23. Vilket är det maximala värdet av produkten av två tal vilkas summa är 10 ?

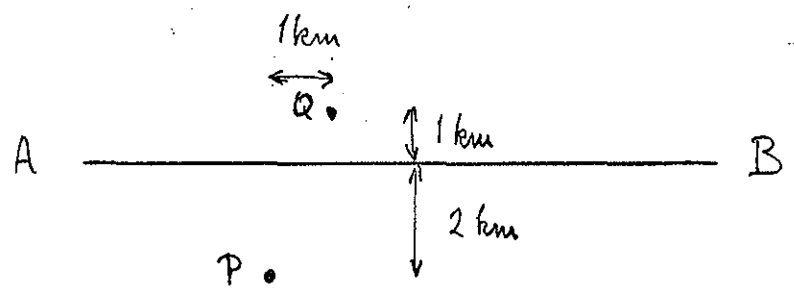
Övning 24. Vilket är det minimala värdet av summan av kvadraterna på två tal vilkas summa är 10 ?

Övning 25. En rektangel med största möjliga area inskrivs i en likbent triangel med bas a och höjd h . Sök rektangelns area.

Övning 26. Hur stor kan arean maximalt vara för en triangel i vilken två sidor har längden 1 ?

Övning 27. En rät cirkulär cylinder har sådan form att volymen är maximal för givet värde på sammanlagda arean av cylinderns begränsningsytor. Bestäm förhållandet mellan cylinderns höjd och bottenytans radie.

Övning 28. En orienterare skall ta sig på kortast möjliga tid från punkten P till punkten Q (se fig.)



I området nedanför linjen AB springer orienteraren 15 km/tim , i området ovanför linjen är terrängen svårare, varför han blott kan göra 10 km/tim där. Vilken väg skall orienteraren välja för att på kortast möjliga tid nå målet?

Övning 29. Kan Du se något samband mellan uppgift 28 och det problem angående ljusbrytning som beskrivs på sidan 246 i CJ (Exempel 3)?

Övning 30. Två ljuskällor, vilkas intensitet förhåller sig som 2:1, befinner sig på avståndet 10 m från varandra. I vilken punkt på sammanbindningslinjen mellan ljuskällorna är belysningsstyrkan minimal? Belysningsstyrkan från en ljuskälla är proportionell mot ljuskällans intensitet och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet till ljuskällan.

Övning 31. Två korridorer, 2.4 respektive 1.6 m breda skär varandra i rät vinkel. Hur lång kan en stege maximalt vara om den skall kunna bäras horisontellt från den ena korridoren till den andra?

Övning 32. En gatlykta, som antas stråla med lika starkt sken i alla riktningar, är höj- och sänkbar i vertikalled. På vilken höjd över gatuplanet skall lyktan befinna sig för att belysningen på den horisontella gatan i en punkt på avståndet a från lodlinjen genom lyktan skall bli så stor som möjligt. Belysningsstyrkan är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet till ljuskällan; vidare är belysningsstyrkan på ett plant ytstycke proportionell mot cosinus för ljusknippets infallsvinkel mot ytan.

Övning 33. a) Man önskar åstadkomma ett inhägnat rektangulärt område med hjälp av ett 1000 meter långt stängsel och en befintlig rak mur. Hur långa skall områdets sidor vara för att områdets area skall bli så stor som möjligt? Muren kan antas vara så lång som behövs.

b) Analogt problem, men området skall denna gång ha formen av en likbent triangel.

c) (Utanför kursen.) Vilken form skulle du gissa att stängslet skall ges för att det inhägnade området överhuvudtaget skall bli så stort som möjligt.

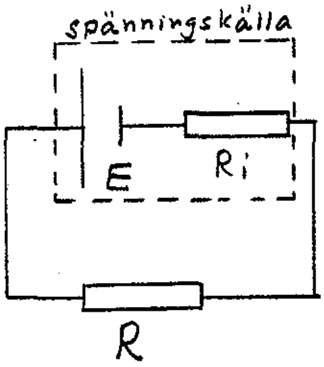
Övning 34. En staty som är 4 m hög står på en sockel som är 5 m hög. På vilket avstånd från statyn skall en person, vars ögon befinner sig på 2 m höjd över marknivån, befinna sig för att statyn skall uppta så stor synvinkel som möjligt?

Övning 35. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara reella tal, och sätt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_n)^2 .$$

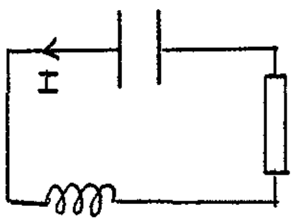
Bestäm det x för vilket $f(x)$ har sitt minsta värde (minsta kvadrat-metodens princip).

Övning 36. En spänningskälla karakteriseras av sin emk E och en inre resistans R_i. Om vi ansluter ett motstånd med resistansen R till spänningskällan blir strömmen $I = \frac{E}{R_i + R}$ enligt Ohms lag.



Bestäm R uttryckt i R_i så att effekten $P = RI^2$ blir maximal i det yttre motståndet R .

Övning 37. Strömmen i en elektrisk svängningskrets av vidstående typ varierar med tiden t enligt



$$I = A\,e^{-\gamma t}\sin 2\pi\nu t\ , \quad t \geq 0$$

där $\nu = 1$, $\gamma = 0.5$ och $A = 2$

a) Skissera grafen till $I = I(t)$

b) Bestäm största och minsta värdet hos I

c) Bestäm $\lim\limits_{t\to\infty} I$

d) Visa att om $\gamma \ll \nu$ så ligger max och min punkterna ungefär på kurvorna $I = \pm\, 2e^{-\gamma t}$.

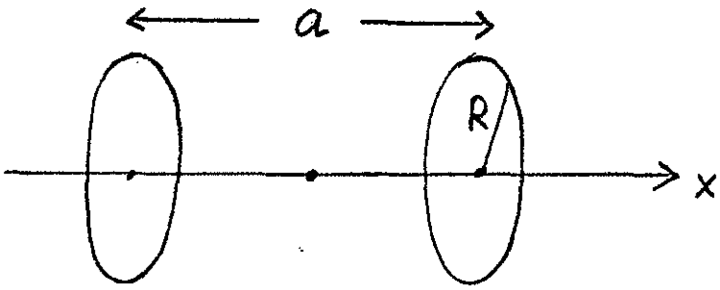
Övning 38. En cirkulär skiva svänger som en pendel kring en axel vinkelrätt genom skivans plan på avståndet x från skivans centrum. Svängningstiden T för en hel svängning fram och tillbaka blir då, om R är skivans radie och g är tyngdaccelerationen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x^2 + R^2/2}{gx}}\ , \quad 0 < x \leq R\ .$$

a) Bestäm x så att T får minimum

b) Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} T$.

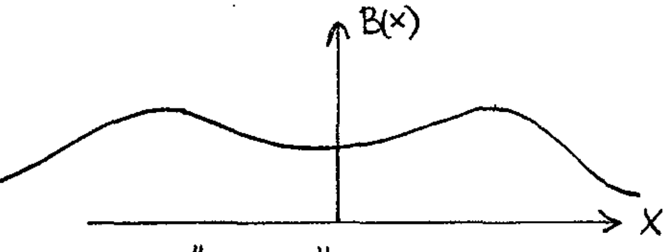
Övning 39.



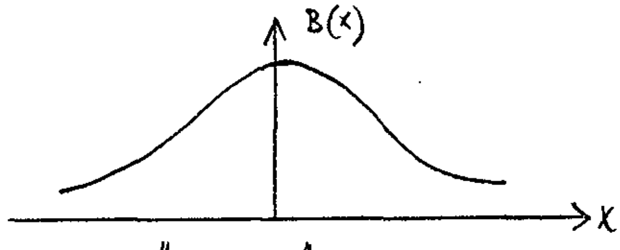
Två cirkulära strömspolar har x-axeln som gemensam axel, och origo ligger mitt emellan spolarna. Avståndet mellan strömspolarna är a. Magnetfältet på x-axeln har då styrkan

$$B(x) = B_0\left[(R^2 + (x - \tfrac{a}{2})^2)^{-3/2} + (R^2 + (x + \tfrac{a}{2})^2)^{-3/2}\right] ,$$

där B_0 är en konstant som beror av strömmen i spolarna och antalet lindningsvarv. Funktionen $B(x)$ är jämn dvs $B(x) = B(-x)$ och har antingen maximum eller minimum för $x = 0$ beroende på värdet av parametern a .



"Stort" a



"litet" a.

Bestäm det a-värde = a_0 för vilket gäller

$a < a_0 \implies B(0)$ är ett maximum

$a > a_0 \implies B(0)$ är ett (lokalt) minimum.

Bestäm också om $B(a_0)$ är maximi- eller minimivärde. a_0 skall uttryckas som en bråkdel av R . (I det här problemet är x en variabel, a en parameter, R en konstant.)

Övning 40. Ett samband mellan tryck p , volym V , och absolut temperatur T hos en mol gas ges

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT , \quad \text{för} \quad V > b ,$$

där a, b och R är positiva konstanter. För varje fixt värde på T kan p lösas ut som funktion av V ur ekvationen. Det finns ett T värde, betecknat T_k (kritiska temperaturen), sådant att grafen för funktionen $p = p(V)$ har ett lokalt maximum och ett lokalt minimum för $T < T_k$, saknar lokala extrempunkter för $T \geq T_k$, och har en terrasspunkt för $T = T_k$. Bestäm T_k uttryckt i a, b och R .

Övning 41. En radioaktiv isotop A sönderfaller till en ny isotop B som i sin tur sönderfaller till C som är stabil

$$A \xrightarrow[\lambda_A]{} B \xrightarrow[\lambda_B]{} C.$$

λ_A och λ_B är sönderfallskonstanter. Om vi vid tiden $t = 0$ startar med ett rent A-preparat gäller

$$N_A = N_{A0}\, e^{-\lambda_A t}$$

$$N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \left(e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}\right), \quad \text{där}$$

N_{A0} = antalet A-kärnor vid $t = 0$

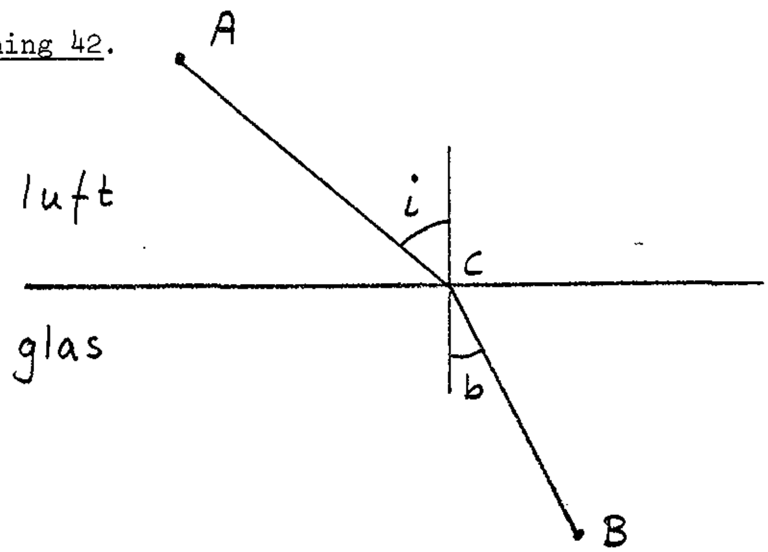
N_A = antalet A-kärnor vid tidpunkten t

N_B = antalet B-kärnor vid tidpunkten t

Vid vilken tidpunkt t har N_B maximum om $\lambda_A = 1.00$ tim^{-1} och $\lambda_B = 3.00$ tim^{-1}. Skissera grafen till $N_B = N_B(t)$.

Vad händer med formeln för N_B om $\lambda_A = \lambda_B$?

Övning 42.



$v = C =$ hastighet i luft

$v_1 = \frac{C}{n}$ = hastighet i glas

En ljusstråle går från den fixa punkten A till den fixa punkten B via punkten C. Studera den tid det tar för ljuset att gå från A till B som funktion av punktens C läge på glasytan. Visa att när gångtiden är minimum så gäller sin i = n sin b (brytningslagen). Problemet är en tillämpning av Fermats princip i optiken.

Övning 43. Plancks strålningslag kan skrivas

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} d\lambda ,$$

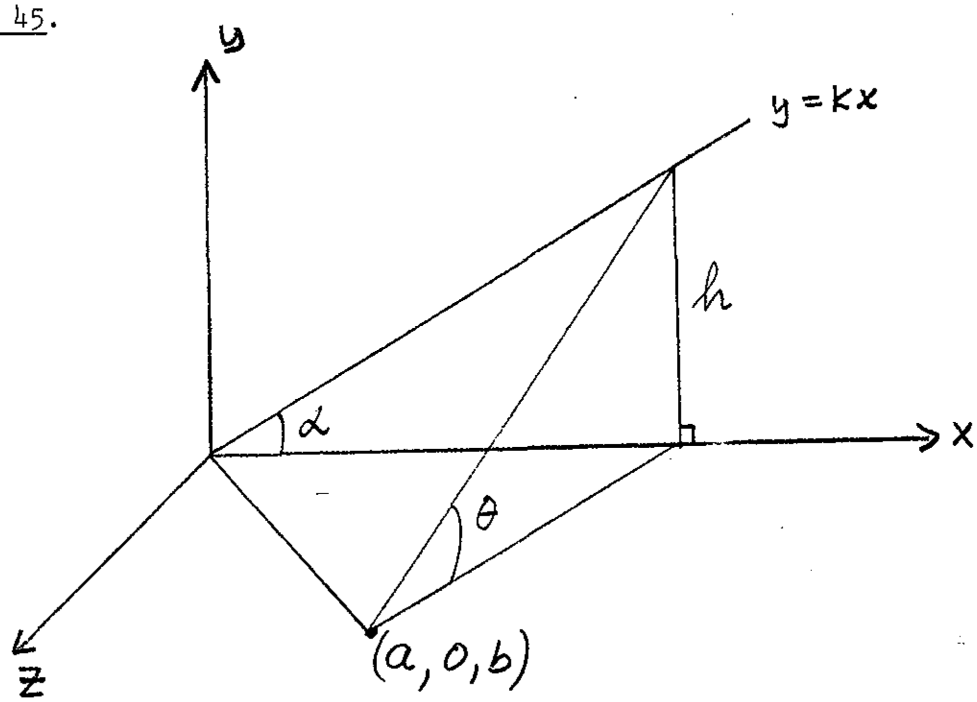
där $g(\lambda)d\lambda$ är den energi som på en sekund strålar ut från 1 m^2 av en yta med temperaturen T i våglängdsintervallet $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Här är h, c och k konstanter. Det λ-värde för vilket $g(\lambda)$ är maximal kallas λ_m. Visa att $\lambda_m T$ = konstant (Wiens förskjutningslag).

Övning 44. Kurvan $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ är en spiral i rymden.

a) Bestäm avståndet från punkten $(1,0,0)$ till spiralen.

b) Bestäm avståndet från punkten $(0,1,0)$ till spiralen.

Övning 45.



Ett flygplan rör sig i x-y planet längs den räta linjen $y = kx$. x-z planet är horisontalplanet. Flygplanets höjd över horisontalplanet är h. En observatör i punkten $(a,0,b)$, där $a > 0$, $b \neq 0$, ser sträckan h under vinkeln θ. Visa att när flygplanet stiger går vinkeln θ genom ett maximum. Tänk efter vad detta ger upphov till för synvilla.

Övning 46. En flodbåt färdas motströms uppför en flod mellan två platser. Bränsleförbrukningen per tidsenhet antas vara proportionell mot kvadraten på båtens hastighet relativt vattnet. Med vilken hastighet skall båten gå relativt stranden för att resan skall bli så billig som möjligt, om strömmens hastighet är v_0 ?

Övning 47. a) Sätt $f(x) = x^2$ och $g(x) = ax$. Beteckna med $M(a)$ det största värdet av $|f(x) - g(x)|$ på intervallet $[0,1]$. Bestäm a så att $M(a)$ blir så litet som möjligt, och ange det minimala värdet på $M(a)$.

b) Samma uppgift som i a) med $f(x) = x^3$ och $g(x) = ax^2$. (Problemet leder till en tredjegradsekvation i a, som är svår att lösa exakt; använd kalkylator för att finna en approximativ lösning.)

c) Samma uppgift som i a) med $f(x) = \sin x$, $g(x) = ax$ och intervallet $[0,\pi/2]$. (Problemet leder till en transcendent ekvation i a; använd kalkylator för att finna en approximativ lösning.)

Derivatan är ett värdefullt hjälpmedel för att bevisa olikheter innehållande en (eller flera) variabler, dvs olikheter mellan funktioner. Metoden illustreras bäst med några exempel.

Exempel 6. Visa olikheterna

a) $e^x > 1 + x$ för $x > 0$.

b) $\log x \leq x - 1$ för $x > 0$.

Lösning. a) Bilda funktionen $f(x) = e^x - 1 - x$, $x \geq 0$. Vi har $f'(x) = e^x - 1 > 0$ för $x > 0$, alltså är f strängt växande för $x > 0$. Vidare är $f(0) = 0$. Av dessa fakta följer genast att $f(x) > 0$ för alla $x > 0$, vilket är påståendet.

b) Sätt $f(x) = x - 1 - \log x$, $x > 0$. Derivation ger $f'(x) = 1 - (1/x)$. Man finner att $f'(x) \leq 0$ för $0 < x \leq 1$, och $f'(x) \geq 0$ för $x \geq 1$. Alltså är f avtagande för $0 < x \leq 1$, växande för $x \geq 1$. Vidare är $f(1) = 0$. Av dessa fakta följer nu att $f(x) \geq 0$ för alla $x > 0$.

Övning 48. Visa olikheterna

a) $\sqrt{1 + x^2} < 1 + (x^2/2)$, $x \neq 0$

b) $x > \arctan x$, $x > 0$.

Övning 49. a) Gäller olikheten i Exempel 6 a för några andra x än $\{x;\ x \geq 0\}$?

b) Kan du se något sätt att direkt härleda den ena olikheten i Exempel 6 ur den andra? (Ledning: gör en lämplig variabelsubstitution.)

Övning 50. Visa olikheterna

a) $e^x > 1/(1 + x)$, $x > 0$

b) $e^x > 1 + (1 + x) \log(1 + x)$, $x > 0$

c) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$.

Kap. 3.7

I detta avsnitt av CJ visas några ytterligare standardgränsvärden för funktioner. Först visas (CJ sid. 249; jfr standardgränsvärde (E) ovan sid. 12 och (j) CJ sid. 70):

(F) om $a > 1$, så $\frac{a^x}{x} \to \infty$, då $x \to \infty$.

Härur härleds (sid. 250; jfr (E') ovan sid. 14) lätt den allmännare utsagan

(F') om $a > 1$, α godtyckligt reellt tal, så
$\frac{a^x}{x^\alpha} \to \infty$, då $x \to \infty$.

Genom lämpliga substitutioner härleder man också lätt ur (F) gränsvärdena (CJ sid. 252).

för godtyckligt $a > 0$ gäller

(G) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$, och

(H) $\lim\limits_{x\to 0+} x^a \log|x| = 0$.

Anm.: Fotnoten på sidan 251 i CJ innehåller ett fel: argumentet ger blott att $(\log x)/x^\alpha \leq 1/\alpha$. Om man i stället väljer $\varepsilon = \alpha/2$, så fungerar resonemanget.

Exempel 7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x} \log x}{2x^2 + 3x}$$

Lösning. Förkorta bråket med x^2 och använd (F') , så fås:

$$\frac{x^2 + x\sqrt{x}\,\log x}{2x^2 + 3x} = \frac{1 + \frac{\log x}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{3}{x}} \longrightarrow \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}, \quad \text{då} \quad x \to \infty .$$

Se vidare de lösta exemplen i avsnittet om gränsvärden för talföljder.

Övning 51. Beräkna gränsvärdet då $x \to \infty$ för följande funktioner

a) $\dfrac{2^x + x^6}{3^x + x^2}$

b) $\dfrac{x + (\log x)^2}{\sqrt{x}\,\log x}$

c) $\dfrac{1 + \log\log x}{\log x}$

d) $e^{x^2}/(1 + x^4 e^{6x})$

Övning 52. Beräkna gränsvärdet då $x \to 0+$ för följande funktioner

a) $\sqrt{x}(\log x)^3$

b) $(\sin x)(\log x)$

c) x^x

d) $x^2 e^{1/x}$

e) $e^{-1/x}$

f) $e^{-1/x}/x^2$

Övning 53. Den kinetiska energin E hos gasmolekylerna i en ideal gas är statistiskt fördelad över intervallet $0 \leq E < \infty$ med frekvensfunktionen

$$\phi(E) = A\sqrt{E}\, e^{-E/kT}$$

där A och k är positiva konstanter och T är gasens absoluta temperatur. Visa att $\phi(E) \to 0$ då $E \to \infty$.

Övning 54. I Plancks strålningslag (se Övning 43) förekommer funktionen

$$g(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)}, \quad \lambda > 0 .$$

Visa att $g(\lambda) \to 0$ då $\lambda \to 0+$ och då $\lambda \to \infty$.

Ledning: Utnyttja att $\lim_{x\to 0} x/(e^x - 1) = 1$.

Detta faktum följer i sin tur av att

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1 + h)}{h} = \left[\frac{d}{dt} \log t\right]_{t=1} = 1$$

genom substitutionen $\log(1 + h) = x$.

Kap. 3.8 - 3.11

Observera att substitutionsmetoden kan användas på två något olika sätt, som visas i nedanstående exempel.

Exempel 8. Beräkna

a) $\int_1^4 \sqrt{x}(1 + x)dx$

b) $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$.

Lösning. a) Sätt $\sqrt{x} = y$, varav $x = y^2$, $dx = 2ydy$. Vidare fås $x = 1 \iff y = 1$ och $x = 4 \iff y = 2$. Integralen övergår sålunda i

$$\int_1^2 y(1 + y^2)2ydy = 2\int_1^2 y^2dy + 2\int_1^2 y^4dy =$$

$$= 2\Big[y^3/3\Big]_1^2 + 2\Big[y^5/5\Big]_1^2 = \frac{14}{3} + \frac{62}{5} = \frac{256}{15} .$$

b) Sätt $x^3 = y$, varav $3x^2dx = dy$, $x = 0 \iff y = 0$, $x = 1 \iff y = 1$, varför integralen övergår i

$$\int_0^1 e^y \frac{1}{3} dy = (e - 1)/3 .$$

Givetvis kan substitutionsmetoden i dessa bägge varianter också användas för att beräkna en primitiv funktion till en given funktion f , dvs en funktion F sådan att $F' = f$.

Övning 55. Sök en primitiv funktion till var och en av funktionerna

a) $x \sin x^2$

b) $x^2\sqrt{1 + x^3}$

c) $x^3/(1 + x^4)$

d) $x\sqrt{x + 1}$

e) $x/(1 + x^2)^2$

f) $\sin^3 x \cos x$

g) $e^{\sqrt{x}}/\sqrt{x}$

h) $e^x/\sqrt{e^x + 1}$

i) $\dfrac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}$

j) $\dfrac{x + 2}{(x^2 + 4x)^2}$

Övning 56. Beräkna integralerna

a) $\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$

c) $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{1 + x^4}$

d) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx$

e) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

f) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

g) $\int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}\, dx$

Kap. 3.11. Partiell integration beskrivs i CJ på sidan 275 (NE del 3, kap. 2.2).

Övning 57. Sök en primitiv funktion till var och en av funktionerna

a) $x\, e^x$

b) $x \sin x$

c) $\log x$

d) $x \log x$

e) $x^2\, e^x$

f) $\arctan x$

Övning 58. Beräkna integralerna

a) $\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$

b) $\int_1^2 \log x\, dx$

c) $\int_0^1 x^2\, e^x\, dx$

d) $\int_0^2 \frac{dx}{e^x + 1}$

e) $\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}\, dx$

f) $\int_0^1 \arctan x\, dx$

Kap. 3.12. Exempel på användning av metoden med partialbråksutveckling beskrivs i CJ avsnitt 3.12 d (NE del 3, kap. 2.4).

Övning 59. Beräkna integralerna

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x + 1)}$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$

d) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$

e) $\int_0^1 \frac{2x + 3}{x^2 + 1}$

f) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$

g) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x + 1)^2}$

h) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)}$

Om uttrycket $ax^2 + bx + c$ har reella nollställen, så integreras förstås funktionen

$$\frac{a_1x + b_1}{ax^2 + bx + c} \qquad (3)$$

genom partialbråksuppdelning. Om samma uttryck har komplexa rötter, så delar man upp funktionen (3) i två termer, vilka efter integration ger en logaritmfunktion respektive en arcustan-funktion. Hur man förfar hoppas vi framgår av följande sekvens av uppgifter.

Övning 60. Ange en primitiv funktion till var och en av funktionerna

a) $\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ (Ledning: täljaren är nämnarens derivata)

b) $\frac{1}{(x + 1)^2 + 1}$

c) $\frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2}$

d) $\frac{x + 1}{x^2 + 4x + 5}$

e) $\dfrac{1}{x^2 + 9}$ (Ledning: substitution $x = 3y$)

f) $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 13}$

g) $\dfrac{x + 2}{x^2 + 4x + 13}$

Övning 61. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 - 2x + 2}$

b) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$

Kap. 3.13. Uttryck innehållande $\sqrt{1 - x^2}$ kan ibland integreras med hjälp av substitutionen $x = \sin t$ eller $x = \cos t$ (CJ sid. 294). Å andra sidan kan en integrand innehållande sin och cos ibland med fördel behandlas med samma substitution (i motsatt riktning). Andra substitutioner som kan vara effektiva vid integration av trigonometriska uttryck är $\tan x = t$ och $\tan(x/2) = t$ (se CJ sid. 290).

Övning 62. Beräkna integralerna

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^3 x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

Kap. 3.15. Observera att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{är konvergent om} \quad \alpha > 1 , \qquad \text{divergent om} \quad \alpha \le 1 ,$$

och att

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{är konvergent om} \quad \alpha < 1 , \qquad \text{divergent om} \quad \alpha \ge 1 .$$

Dessa utsagor följer direkt av definitionerna (CJ 3.15 a respektive 3.15 e; NE del 3 kap. 2.6, 2.7). Vidare är det viktigt att känna till jämförelsekriterierna (CJ 3.15 d, e):

Om $0 \le f(x) \le g(x)$ för $x \ge a$ och $\int_a^\infty g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergent.

Motsvarande gäller för integraler över $[a,b]$ där integranden är obegränsad. För att visa att en given integral $\int_a^\infty f(x)dx$ är konvergent kan man ofta välja $g(x) = x^{-\alpha}$ för lämpligt $\alpha > 1$. För att visa att en given integral är divergent väljer man $f(x) = x^{-\alpha}$ för något lämpligt $\alpha \le 1$ och låter $\int_a^\infty g(x)dx$ vara den givna integralen.

Exempel 9. Avgör huruvida integralen

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$ c) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{x(1 + x)}$

är konvergent.

Lösning. a) Integranden är ≤ 1 på hela integrationsintervallet; integralen är således generaliserad endast i oändligheten. Nu är

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} < \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{för} \quad x \ge 1 .$$

Eftersom $\int_1^\infty x^{-3/2}\, dx$ är konvergent så måste således den givna integralen vara konvergent.

b) Integralen är obegränsad nära $x = 0$. Vi har att

$$\frac{1}{x(1+x)} \geq \frac{1}{2x} \quad \text{för} \quad 0 < x \leq 1 .$$

Eftersom $\int_0^1 (1/2x)dx$ är divergent, så är den givna integralen divergent.

c) Om $x \geq 1$, så är $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}x$, alltså

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x} .$$

Eftersom $\int_1^\infty (1/x)dx$ är divergent, så är den givna integralen divergent.

Övning 63. Avgör vilka av nedanstående integraler som är konvergenta.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{3/2}}$

b) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x} dx$

c) $\int_0^\infty (1+x)e^{-x} dx$

d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}} dx$

e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$

f) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$

Övning 64. Beräkna integralerna

a) $\int_0^\infty x e^{-ax} dx$, $a > 0$

b) $\int_0^1 \log x \, dx$

c) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$

d) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-4x+6}$

e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$

Exempel 10. Avgör huruvida integralen

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

är konvergent.

Lösning. Integralen är obegränsad både nära $x = 0$ och nära $x = 2$. Vi skriver därför

$$\int_0^2 = \int_0^1 + \int_1^2 = I_1 + I_2 ,$$

och behandlar vardera integralen för sig. För $0 < x \leq 1$ är $2 - x \geq 1$, alltså

$$\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Således är integralen I_1 konvergent. För $1 \leq x < 2$ fås på analogt sätt

$$\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}} .$$

Eftersom $\int_1^2 (2 - x)^{-1/2}\, dx$ är konvergent (gör substitutionen $2 - x = y$), så följer att integralen I_2 är konvergent. Den givna integralen är således konvergent.

Övning 65. Vilka av följande integraler är konvergenta.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos(x/2)}}$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\cos(x/2)}$ d) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)^2}}$ $(a < b)$

Övning 66. En s.k. matematisk pendel består av en masspunkt (massa m) upphängd i en tråd (längd L). Pendeln svänger i ett vertikalt plan så att masspunkten beskriver en fram- och återgående rörelse längs en cirkelbåge. Ett uttryck för svängningstiden T, dvs tiden för en fram- och återgående rörelse, kan härledas på följande sätt. Låt g beteckna tyngdaccelerationen, θ pendelns utslagsvinkel vid en viss tidpunkt t, θ_0 maximala utslagsvinkeln, $v = v(\theta)$ hastigheten i punkten med utslagsvinkel θ. Eftersom den vägsträcka som svarar mot den lilla vinkeländringen $d\theta$ är $Ld\theta$ och motsvarande hastighet är v, så tar sagda förflyttning tiden $Ld\theta/v$. Tiden för en hel svängning är således

$$T = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{Ld\theta}{v} .$$

Ett uttryck för v som funktion av θ kan lätt fås ur energiprincipen. Eftersom masspunktens höjd över lägsta nivån är $L(1 - \cos\theta)$, och potentiella energin således $mgL(1 - \cos\theta)$, så får vi ekvationen

(4) $$\frac{mv^2}{2} + mgL(1 - \cos\theta) = C$$

där C är en konstant. Konstantens värde kan bestämmas genom att vi observerar att $v = 0$ i banans vändpunkt, dvs då $\theta = \theta_0$. Vi får härigenom

$$C = mgL(1 - \cos\theta_0)$$

och genom insättning i (4)

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

eller

$$v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)} .$$

Insättning i uttrycket för T ger

(5) $$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} .$$

(Jfr CJ sid. 410.) Visa att integralen (5) är konvergent. (Överraskande nog är integralens värde i det närmaste oberoende av θ_0 och nära 1 för måttliga värden på θ_0 , varför $T = \sqrt{2L/g}$ för sådana θ_0 .)

Svar kap. 3.

1. a) $6x^2 - 7$ b) $10x^9 - 35x^6$ c) $-2/x^3$
   d) $-1/(x-2)^2$ e) $(1-x)/(1+x)^3$ f) $(1-x^2)/(x^2+1)^2$
   g) 0

2. a) $2\cos 2x$ b) $2x\cos x - x^2\sin x$ c) $-\sin 2x$
   d) $(x\cos x - \sin x)/x^2$ e) $(x+\sin x)/(1+\cos x)$

3. a) 0 b) $10!$ c) 0

4. a) -3 b) -12

5. $\phi(y) = \sqrt{y}$, $f'(x_0) = 4$, $\phi'(y_0) = 1/4$

6. $D_\phi = [0,16]$, $\phi'(5) = 1/7$

7. $D_\phi = [0,\infty)$, $\phi'(\pi/2) = 1/(2+\pi)$

9. a) $\pi/6$ b) $-\pi/2$ c) $2\pi/3$
   d) $\pi/4$ e) $\pi/2$ f) $-\pi/2$
   g) $\pi/4$

10. a) $0 \leq x \leq \pi$ b) $-1 \leq x \leq 1$ c) $-\pi/2 < x < \pi/2$

11. a) $0 \leq x \leq \pi$ b) $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

12. a) $\arctan x + x/(1+x^2)$ b) $(\arccos x - \arcsin x)/(\sqrt{1-x^2})$
    c) $2/(1+x^2)(1-\arctan x)^2$

13. a) $2xe^x + x^2e^x$ b) $2x\log x + x$ c) $e^x\log x + e^x/x$
    d) $\log x$ e) $\cos^2 x/2\sqrt{x} - \sqrt{x}\,\sin 2x$
    f) $x^2e^x\sin x + x^2e^x\cos x + 2xe^x\sin x$

14. a) 1 b) 6 c) $720 = 6!$ d) $6!$ e) 0

15. a) $2xe^{x^2}$ b) $e^{\sin x}\cos x$ c) $-1/(1+x)^2$
    d) $\cot x$ e) $8(x+1)(x^2+2x)^3$ f) $e^{\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$
    g) $(\log x)^{-2/3}/3x$ h) $-4x/(1+x^2)^3$ i) $x/\sqrt{1+x^2}$
    j) $3\sin^2 x\cos x$ k) $6\sin^2 2x\cos 2x$ l) $3\cot 3x$
    m) $\sin x\cos x/\sqrt{1+\sin^2 x}$ n) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$ o) $1/\sqrt{1+x^2}$

p) $x^x(\log x+1)$ q) $x^{\sin x}(\sin x/x + \cos x \log x)$

16. 2307 år

17. a) 24 timmar b) 190 timmar

18. 8830 år

19. 23 sekunder

20. a) 2, -2 b) största värde saknas, minsta värde -27

c) $2/3\sqrt{3}$, 0 d) $1/e$, 0 e) minsta värde $e^{-1/e}$

f) $2^{2/3}/3$, 0

21. a) 2 b) -2, 0 c) saknas

d) 0, 4 e) 1 och -1 f) saknas

g) 0 h) 0 i) -1, 0, 1

22. 900 m^2

23. 25

24. 50

25. ah/4

26. 1/2

27. 2

28. Raka vägen till en punkt på sträckan AB ca 800 m öster om P , sedan raka vägen till Q .

30. I punkten på avståndet $10\sqrt[3]{2}/(1+\sqrt[3]{2}) \approx 5{,}575$ m från den starkare ljuskällan

31. Ca 5,6 m

32. $a/\sqrt{2}$

33. a) Sidorna ska vara 500, 250 och 250 m.

b) Toppvinkeln skall vara 90° .

c) Stängslet skall ha formen av en halvcirkel.

34. $\sqrt{21}$ m.

35. $(\sum_1^n a_k)/n$

36. $R = R_i$

37. $I_{max} \approx 1.771$, $I_{min} \approx 1.379$

38. a) $R/\sqrt{2}$ b) ∞

39. $a_0 = R$; maximum för $a = a_0$

40. $T_k = 8a/27bR$

41. $t = \frac{1}{2}\log 3 \approx 0.55$ tim ; Om $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$, så är
$N_B = \lambda te^{-\lambda t}$ (sätt $\lambda_B = \lambda_A + \varepsilon$ och låt $\varepsilon \to 0$)

44. a) 0 b) avståndet ≈ 1.095 ($t \approx 0.739$)

45. Sätt $f(x) = \tan(\theta(x))$. Eftersom tan är en monoton funktion har $\theta(x)$ och $f(x)$ maxima samtidigt. Man får $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, och $\max f = f((a^2+b^2)/a) = k\sqrt{1+(a^2/b^2)} > k$.

46. v_0

47. a) $\min M(a) = 3 - 2\sqrt{2}$ för $a = 2(\sqrt{2}-1)$.
b) $\min M(a) \approx 0{,}106$ för $a \approx 0{,}894$
c) $\min M(a) \approx 0{,}1382$ för $a \approx 0{,}7246$

49. Ja, för alla $x < 0$.

51. a) 0 b) ∞ c) 0 d) ∞

52. a) 0 b) 0 c) 1 d) ∞ e) 0 f) 0

55. a) $-\frac{1}{2}\cos x^2$ b) $\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}$ c) $\frac{1}{4}\log(1+x^4)$
d) $\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ e) $\dfrac{-1}{2(1+x^2)}$
f) $\frac{1}{4}\sin^4 x$ g) $2e^{\sqrt{x}}$ h) $2\sqrt{e^x+1}$
i) $\log(x^4+x^2+1)$ j) $-1/2(x^2+4x)$

56. a) $(e-1)/2$ b) $\log(\frac{3+2\sqrt{2}}{4})$ c) $\frac{1}{4}\log\frac{17}{2}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{2} - 1$ f) $\frac{\pi}{4}$
g) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

57. a) $(x-1)e^x$ b) $-x\cos x + \sin x$ c) $x \log|x| - x$

d) $\frac{x^2}{2} \log|x| - \frac{x^2}{4}$ e) $(x^2-2x+2)e^x$

f) $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$

58. a) $\frac{\pi}{2} - 1$ b) $\log 4 - 1$ c) $e - 2$

d) $2 - \log(e^2+1) + \log 2$ e) $(1 - \log 2)/2$

f) $(\pi - \log 4)/4$

59. a) $\log \frac{4}{3}$ b) $\log \frac{4}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{1}{2} \log 2$ e) $\log 2 + \frac{3\pi}{4}$ f) $\log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

g) $\log \frac{4}{3} - \frac{1}{6}$ h) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \arctan 2$

60. a) $\log(x^2+2x+2)$ b) $\arctan(x+1)$

c) $\log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1)$

d) $\frac{1}{2} \log(x^2+4x+5) - \arctan(x+2)$ e) $\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3}$

f) $\frac{1}{3} \arctan (\frac{x+2}{3})$ g) $\frac{1}{2} \log(x^2+4x+13)$

61. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$ b) $\pi/2\sqrt{3}$

62. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{16}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{3}$ g) 1 h) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

63. a) Konv. b) Konv. c) Konv. d) Div. e) Div. f) Konv.

64. a) $\frac{1}{a^2}$ b) -1 c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ e) $\log 2$

65. a) Div. b) Div. c) Konv. d) Konv.

KAPITEL 4

Kap. 4.1c

En icke-parametrisk ekvation för en kurva är en ekvation som icke innehåller någon parameter, alltså en ekvation av formen $y = f(x)$ eller allmännare $F(x,y) = 0$. En sådan ekvation erhåller man ur en parametrisk representation, som ju består av två ekvationer, genom att eliminera parametern mellan de båda ekvationerna.

Exempel 1. Sök en icke-parametrisk ekvation för den kurva som är given genom

a) $x = 2t + 3, \quad y = -t + 5, \quad -\infty < t < \infty$

b) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $x = t + (1/t), \quad y = t - (1/t), \quad t \neq 0$.

Lösning. a) Multiplicera den andra ekvationen med 2 och addera ekvationerna. Detta ger $x + 2y = 13$.
I detta fall hade man givetvis också kunnat göra på följande sätt: lös t ur den ena ekvationen, t.ex. den andra, och sätt in det erhållna uttrycket i stället för t i den första ekvationen. Detta förfaringssätt är emellertid inte alltid praktiskt. Ett exempel härpå ser vi i exempel b).

b) Kvadrering och addering ger $x^2 + y^2 = 1$.

c) Kvadrering av bägge ekvationerna ger

$$x^2 = t^2 + 2 + (1/t^2), \quad y^2 = t^2 - 2 + (1/t^2).$$

Subtraktion av dessa ekvationer ger

$$x^2 - y^2 = 4,$$

vilket är ekvationen för en hyperbel.
Att i detta fall försöka lösa t ur en av de ursprungliga ekvationerna leder för det första till krångligare räkningar och för det andra till trassel med tecknet i samband med rotutdragningen (pröva själv: multiplikation med t ger $tx = t^2 + 1$, vilket är en andragradsekvation i t).

Övning 1. Sök en icke-parametrisk ekvation för den kurva som är given genom nedanstående parameterframställning, och skissera kurvan:

a) $x = -t + 2, \quad y = -3t + 1, \quad t \in R$

b) $x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \ (a > 0, b > 0)$

c) $x = 1 + a \cos t, \quad y = -2 + a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x = \sin t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

e) $x = \sin t$, $y = \sin 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

f) $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in R$, $(a > 0,\ b > 0)$

g) $x = |\cos t|$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Övning 2. Skissera kurvan

a) $x = -t + 2$, $y = -3t + 1$, $0 \leq t \leq 2$

b) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$

c) $x = 2 \cos 3t$, $y = 2 \sin 3t$, $0 \leq t \leq \pi/3$

d) $x = 2 \cos \frac{t^2}{\pi}$, $y = 2 \sin \frac{t^2}{\pi}$, $0 \leq t \leq \pi$

e) $x = |2t - 1|$, $y = t$, $0 \leq t \leq 2$

f) $x = 2t - t^2$ för $0 \leq t \leq 1$, $x = t$ för $1 < t \leq 2$
$y = 1 - t$ för $0 \leq t \leq 1$, $y = 0$ för $1 < t \leq 2$.

Övning 3. Ange en parameterframställning för var och en av följande kurvor:

a) räta linjestycket från $(0,1)$ till $(2,0)$

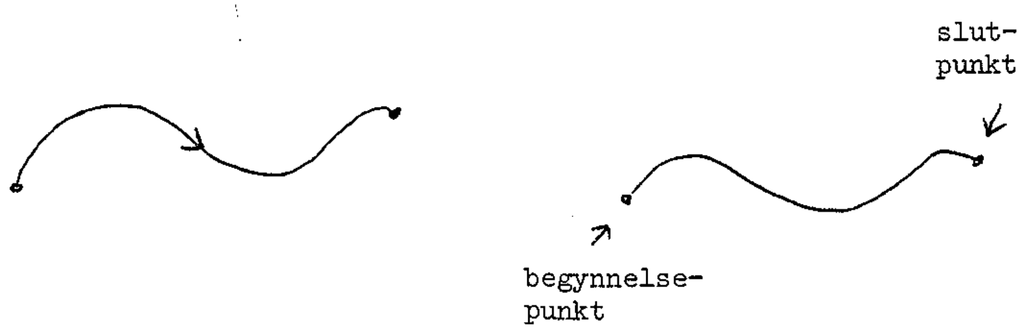
b) cirkeln med radie 2 och medelpunkt i $(3,5)$

c) parabelbågen $x = 2y^2 + 1$, $-1 \leq y \leq 1$

d) den kurva som består av det räta linjestycket från $(-2,2)$ till $(0,2)$ samt halvcirkelbågen från $(0,2)$ till $(0,0)$ med medelpunkt i $(0,1)$.

Kap. 4.1d

Begreppet orientering för en kurva förklaras på sidan 334 i CJ. En orienterad kurva är en kurva för vilken man har angivit en genomloppsriktning. Om kurvan har två ändpunkter, dvs det är fråga om ett ändligt kurvstycke, så kan man också ange orienteringen genom att ange vilken av ändpunkterna som är begynnelsepunkt och vilken som är slutpunkt. Intuitivt kan man således tänka sig en orienterad kurva som en enkelriktad väg. Observera att orienteringen, dvs kurvans riktning får anges på vilket sätt man vill, t.ex. på något av de två sätten nedan.



Man har gjort den konventionen att en parametrisering av en kurva anger en orientering på följande sätt: kurvans genomloppsriktning är den riktning i vilken punkten $(x(t),y(t))$ genomlöper kurvan då parametern t växer.

Exempel 2. Beskriv orienteringen för de tre kurvorna i exempel 1.

Lösning. a) Eftersom $x = 2t + 3$, så växer x då t växer. Detta visar att (x,y) måste röra sig i den riktning som pilen visar då t växer.

b) Insättning av några t-värden visar att punkten $(\cos t, \sin t)$ genomlöper enhetscirkeln i den riktning som pilen visar då t växer från 0 till 2π.

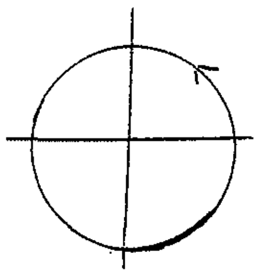


fig. 2

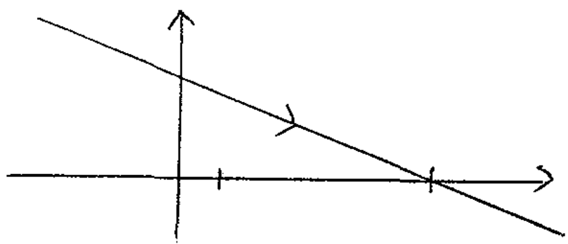


fig. 1

c) Skissera först själva hyperbelkurvan.

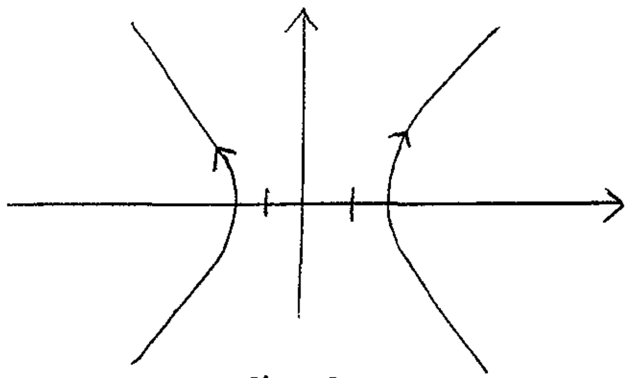


fig. 3

Av ekvationen $y = t - (1/t)$ ser man att y växer då t växer. Bägge hyperbelgrenarna måste alltså vara riktade uppåt i figuren.

Övning 4. Beskriv orienteringen för var och en av kurvorna i Övning 1.

Kap. 4.1e

(Se sid. 343-344 i CJ.)

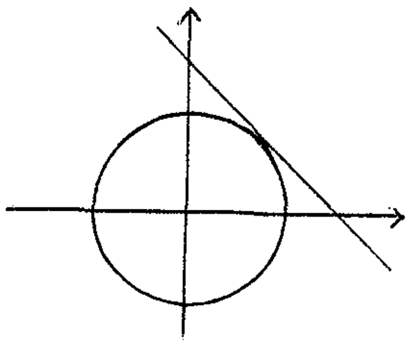
Exempel 3. Ange ekvationen för tangenten till kurvan $x = \cos t$, $y = \sin t$ i den punkt som svarar mot $t = \pi/4$.

Lösning. $t = \pi/4$ ger $x = y = 1/\sqrt{2}$.
Det är alltså frågan om tangenten i punkten $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ till cirkeln. Vi beräknar tangentens lutning. Derivation ger

$$\dot{x} = -\sin t,\quad \dot{y} = \cos t\ .\quad t = \pi/4 \text{ ger } \dot{x} = -1/\sqrt{2},\ \dot{y} = 1/\sqrt{2}\ ,$$

varav tangentens lutning $dy/dx = \dot{y}/\dot{x} = -1$. Alltså är tangentens ekvation (se sid. 344)

$$\eta - \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}})\ .$$



Liksom i CJ har vi här kallat koordinaterna för ξ och η för att undvika förväxling med x och y .
I formeln

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

på sid. 344 i CJ står ju x och y för koordinaterna för tangeringspunkten, alltså här $x = [\cos t]_{t=\pi/4} = 1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$.

Exempel 4. Ange ekvationen för tangenten till kurvan i Exempel 1c i punkten $(5/2,\ 3/2)$.

Lösning. Här måste vi först ta reda på motsvarande parametervärde.

$$\begin{cases} t + (1/t) = 5/2 \\ t - (1/t) = 3/2 \end{cases}$$

ger $2t = 4$, dvs $t = 2$.
Derivation ger $\dot{x} = 1 - (1/t^2)$, $\dot{y} = 1 + (1/t^2)$, varav $\dot{x} = 3/4$ och $\dot{y} = 5/4$. Således är tangentens lutningskoefficient $dy/dx = \dot{y}/\dot{x} = 5/3$, varav tangentens ekvation fås till

$$\eta - \frac{3}{2} = \frac{5}{3}(\xi - \frac{5}{2})\ .$$

Övning 5. a) Ange ekvationen för tangenten i punkten $(1,\sqrt{3})$ till cirkeln $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

b) Ange ekvationen för tangenten i punkten $(-1/\sqrt{2},\sqrt{2})$ till ellipsen $x = \cos t$, $y = 2\sin t$.

c) Ange ekvationen för tangenten i punkten $(2,1)$ till parabeln $x = y^2 + y$.

Övning 6. Ange ekvationerna för tangent och normal till kurvan $y = x^3 - 2x$ i origo.

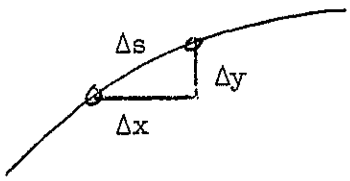
Övning 7. Ange ekvationerna för tangent och normal till kurvan i Övning 1e i punkten $(1,0)$. Samma fråga för punkten $(0,0)$.

Kap. 4.1g

De uttryck för båglängden som kan komma ifråga står längst ned på sid. 350 samt på sid. 351, formlerna (9) och (10).

Observera att dessa formler är mycket lätta att minnas. Ty om $\Delta\tau$ betecknar en liten ändring av parametern τ, och Δx resp. Δy är motsvarande ändringar i x resp. y, och Δs är längden av motsvarande stycke av kurvan, så gäller på grund av Pytagoras sats approximativt att

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



förutsatt att bågstycket är så litet att det är så gott som rätlinjigt. Således

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta y/\Delta x)^2 + 1} \cdot \Delta x$$

och på samma sätt

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x/\Delta\tau)^2 + (\Delta y/\Delta\tau)^2} \cdot \Delta\tau .$$

Eftersom båglängden L är summan av längderna av sådana småstycken, är det naturligt att

$$L = \int_a^b \sqrt{(dy/dx)^2 + 1}\ dx$$

respektive

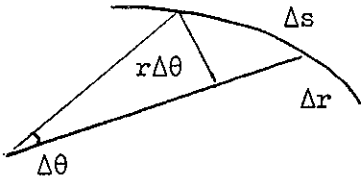
$$L = \int_a^b \sqrt{(dx/d\tau)^2 + (dy/d\tau)^2}\ d\tau .$$

Den tredje formeln, som gäller polära koordinater, kommer man fram till om man resonerar på analogt sätt utgående från den "rät-vinkliga triangeln" i figuren på nästa sida:

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta r)^2 + (r\Delta\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{(\Delta r/\Delta\theta)^2 + r^2} \cdot \Delta\theta$$

osv.



Exempel 5. Ange ett uttryck i form av en bestämd integral för längden av följande kurvstycken:

a) $y = x^2$, $a \leq x \leq b$

b) $x = t^2$, $y = t^3$, $a \leq t \leq b$

c) $r = \sin^2 \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Lösning. a) $dy/dx = 2x$, alltså är båglängden

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx .$$

b) $\dot{x} = dx/dt = 2t$, $\dot{y} = dy/dt = 3t^2$, alltså

$$L = \int_a^b \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$

c) $\dot{r} = dr/d\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$, alltså

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\sin^4\theta + (2 \sin\theta \cos\theta)^2}\, d\theta .$$

Övning 8. Beräkna längden av

a) kurvan $y = \cosh x$ från $x = 0$ till $x = A$.

b) kurvan $y = x^{3/2}$ från $x = 0$ till $x = 1$.

c) kurvan $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ från $t = 1$ till $t = 3$.

d) kurvan $r = \sin\theta$ från $\theta = 0$ till $\theta = \pi$.

e) kurvan $r = \theta^2$ från $\theta = 0$ till $\theta = \pi/2$.

Övning 9. Skissera kurvan

$$r = a(1 - \cos\theta),$$

och beräkna kurvans längd.

Exempel 6. Ange en parameterframställning med båglängden som parameter för cirkeln $x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$.

Ledning. Skriv först upp vilken som helst parameterframställning $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ för den givna kurvan. Uttryck sedan båglängden s som funktion av parametern t med hjälp av någon av formlerna för båglängden i 4.1f. Observera att valet av punkt svarande mot $s = 0$ är godtyckligt. Lös t som funktion av s , och sätt in det så erhållna uttrycket på t i den ursprungliga parameterframställningen.

Lösning. En parameterframställning för cirkeln är $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Båglängden från punkten $(a,0)$, som svarar mot $t = 0$, fram till den punkt som svarar mot parametervärdet t är

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{(- a \sin t)^2 + (a \cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^t a\, dt = at.$$

Ur likheten $s = at$ kan vi lösa t som funktion av s, och får $t = s/a$. Insättes detta uttryck i den ursprungliga parameterframställningen så får vi

$$x = a \cos(s/a), \quad y = a \sin(s/a) ,$$

vilket är den sökta parameterframställningen.

Övning 10. Ange en parameterframställning med båglängden som parameter till

a) räta linjen $y = ax + b$

b) kedjelinjen (catenary) $y = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. Verifiera att i bägge fallen $(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1$ om parametern s är båglängden.

Kap. 4.1h

Exempel. Beräkna krökningsradien hos ellipsen $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ $(a > 0,\ b > 0)$ i punkten $(a,0)$.

Lösning. Punkten $(a,0)$ svarar mot $t = 0$. Vi har för $t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = b$, $\ddot{x} = - a$, $\ddot{y} = 0$, alltså får vi enligt formel (15) på sidan 355 i CJ krökningen κ till

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{0 - (-ab)}{0 + b^2} = \frac{a}{b} .$$

Krökningsradien, som är $1/|\kappa|$, är alltså b/a. (I CJ definieras krökningsradien som $1/\kappa$. Detta förefaller onaturligt; en radie bör vara positiv.)

Övning 11. Beräkna krökningsradien hos ellipsen i föregående exempel i punkten $(a/\sqrt{2},\ b/\sqrt{2})$.

Övning 12. Beräkna krökningsradien hos
a) parabeln $y = ax^2$ i origo
b) hyperbeln $xy = 1$ i punkten $(1,1)$.

Övning 13. I vilken punkt på kurvan $y = 1/x^2$ är krökningen störst?

Övning 14. En bil färdas med konstant hastighet längs kurvan $y = e^x$. I vilken punkt är risken för att bilen sladdar störst?

Övning 15. Låt $x(t)$ och $y(t)$ vara godtyckliga två gånger deriverbara funktioner och låt a vara en konstant $\neq 0$. Sätt

$$u(t) = x(at)$$
$$v(t) = y(at) .$$

Uttryck storheten

$$\frac{\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u}}{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)^{3/2}}$$

i derivator av funktionerna $x(t)$ och $y(t)$. Kommentera resultatet ur geometrisk synpunkt. Kan Du formulera en generellare utsaga än den som Du just funnit?

Övning 16. Antag att $\bar{v}(s) = (\phi(s),\ \psi(s))$ är en enhetsvektor för varje s. Då kan man skriva $\phi(s) = \cos\alpha(s)$, $\psi(s) = \sin\alpha(s)$, där $\alpha = \alpha(s)$ är vektorns riktningsvinkel. Antag att $\phi(s)$ och $\psi(s)$ är deriverbara funktioner. Visa att vektorn

$$\bar{u} = d\bar{v}/ds$$

är ortogonal mot $\bar{v}$, och att längden av $\bar{u}$ är lika med absolutbeloppet av derivatan $d\alpha/ds$. (Tillämpning: om $\bar{v}(s)$ är tangentvektor av enhetslängd till en kurva och s är båglängden, så är $|d\bar{v}/ds| = |\kappa|$, där κ är kurvans krökning; jfr (14) sid. 354 i CJ.)

Kap. 4.1i. Invarians

I mekanikläroboken [F] används flitigt begreppet invarians. På sidan 112 sägs t.ex. att mekanikens lagar är Galileiinvarianta, dvs invarianta med avseende på Galileitransformationen, eller rättare, invarianta med avseende på alla Galileitransformationer. En lag, som har formen av en likhet mellan två storheter eller uttryck, kan alltså sägas vara invariant med avseende på en given mängd av transformationer. Låt oss här undersöka vad en sådan utsaga innebär.

Man använder också uttrycket att en viss <u>storhet</u> är invariant med avseende på en viss mängd av transformationer. T.ex. sägs på sidan 116 rad 8 att en partikels massa är Galileiinvariant. Vidare konstateras på samma sida att en partikels kinetiska energi $E_k = mv^2/2$ <u>inte</u> är Galileiinvariant, vilket är uppenbart, eftersom m är Galileiinvariant, medan hastigheten v inte är det (formel (1) sidan 110 i [F]). På sidan 164 sägs vidare att naturlagarna är invarianta under (alla) tidstranslationer, och på sidan 166 sägs att som en följd härav den potentiella energin E_p måste vara en translationsinvariant storhet (som funktion av tiden). Vi skall här försöka klargöra dessa viktiga begrepp med hjälp av några exempel.

Begreppet invariant storhet eller invariant samband (likhet, ekvation) kan tillämpas på vilken som helst mängd av transformationer. För att göra begreppens innebörd tydlig börjar vi med att studera mycket enkla mängder av transformationer. De transformationer som det gäller är i regel koordinattransformationer.

<u>Translationsinvarians</u>. En orienterad linje är given. Man väljer en punkt O på linjen som origo, och anger på vanligt sätt koordinaten x för punkten P på linjen som avståndet från O till P, räknat positivt om vektorn $\overline{OP}$ har positiv riktning enligt linjens orientering, annars negativt. Låt O' vara ett annat origo och x' koordinaten för P relativt O'. Övergång från x-koordinat till x'-koordinat kallas för en translation av koordinatsystemet. Om O' har koordinaten a i O-systemet, så är uppenbarligen sambandet mellan nya och gamla koordinater

(1) $$x' = x - a$$

(rita figur!). Om vi har flera punkter P_k, $k = 1,2,\ldots$, och motsvarande koordinater är x_k respektive x'_k, så gäller förstås

(2) $$x'_k = x_k - a \; , \quad k = 1,2,\ldots \; .$$

Man säger att en funktion (eller i dagligt tal ett uttryck) $f(x_1,x_2)$ är invariant med avseende på mängden av translationer, eller <u>translationsinvariant</u>, om funktionen alltid får oförändrat värde då x_1 och x_2 utbyts mot x'_1 respektive x'_2, dvs

(3) $$f(x_1,x_2) = f(x'_1,x'_2)$$

eller med hänsyn till (2)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1 - a, x_2 - a)$$

för alla x_1,x_2 och a .

Exempel 7. Vilka av nedanstående uttryck är translationsinvarianta?

a) $x_1 - x_2$

b) $x_1 + x_2$.

Lösning. a) Med hjälp av (2) får vi

(4) $$x_1' - x_2' = (x_1 - a) - (x_2 - a) = x_1 - x_2 .$$

Uttrycket är alltså translationsinvariant.

b) På samma sätt fås

$$x_1' + x_2' = (x_1 - a) + (x_2 - a) = x_1 + x_2 - 2a .$$

Uttrycket är inte translationsinvariant, ty likheten (3) är falsk för varje $a \neq 0$.

Formeln (4) visar att uttrycket $x_1 - x_2$ beror endast på punkternas P_1 och P_2 lägen på linjen och inte på vilket origo man valt. Detta är anledningen till att frågan om invariansen har intresse.

Att en funktion av tre koordinater $f(x_1,x_2,x_3)$ (eller flera) är translationsinvariant definieras analogt.

Övning 17. Vilka av nedanstående uttryck är translationsinvarianta?

a) $|x_1 - x_2|$

b) $(x_1 + x_2)/2$

c) $|x_1| - |x_2|$

d) x_1/x_2

e) $2x_1 - x_2$

f) $2x_1 - x_2 - x_3$.

Innebörden av att ett samband mellan två eller flera koordinater är translationsinvariant förklaras lätt med hjälp av några exempel.

Exempel 8. Vilka av nedanstående samband mellan koordinaterna x_1, x_2 och x_3 för tre punkter P_1, P_2 och P_3 på linjen är translationsinvarianta?

a) $x_3 = x_1 + x_2$

b) $x_3 = (x_1 + x_2)/2$

c) $x_3 = x_1 - x_2$.

Lösning. Insättning av $x_k = x_k' + a$ för $k = 1, 2, 3$ ger i fall a)

$$x_3' + a = x_1' + a + x_2' + a , \quad \text{dvs} \quad x_3' = x_1' + x_2' + a ,$$

i fall b)

$$x_3' + a = \frac{1}{2}(x_1' + a + x_2' + a) , \quad \text{dvs} \quad x_3' = (x_1' + x_2')/2 ,$$

och i fall c)

$$x_3' + a = (x_1' + a) - (x_2' + a) \ , \quad \text{dvs} \quad x_3' + a = x_1' - x_2' \ .$$

I fallen a) och c) har alltså likheten ändrat form genom koordinatbytet, i fall b) däremot ej. Likheten b) sägs därför vara translationsinvariant, a) och c) däremot ej. Likheten b) kan alltså sägas beskriva ett samband mellan de tre punkternas P_1, P_2, P_3 lägen (beskriv detta samband i geometriska termer!). Så är däremot inte fallet med likheterna a) och c) .

Det framgår av exemplen att en definition av translationsinvariant samband skulle kunna formuleras på följande sätt. Ett samband mellan ett antal koordinater $x_1, x_2, \ldots$ - låt oss säga tre koordinater - sägs vara translationsinvariant, om det kan skrivas på formen

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \ ,$$

där f är en translationsinvariant funktion.

Övning 18. Antag att man vill definiera en tvåställig operation betecknad $\oplus$ mellan punkter på linjen, dvs till ett godtyckligt par av punkter P_1, P_2 skall associeras en tredje punkt $P_3 = P_1 \oplus P_2$ enligt en bestämd regel. Regeln skall formuleras genom att P_3:s koordinat x_3 anges som funktion av koordinaterna x_1 och x_2 för P_1 respektive P_2 . Vilken punkt på linjen som är origo förutsätts inte angivet. Vilken eller vilka av nedanstående formler för x_3 uttryckt i x_1 och x_2 kan komma i fråga för att definiera operationen $\oplus$? (En eller flera definitioner är av någon anledning oförnuftig; tänk efter varför?)

a) $x_3 = x_1 + x_2$

b) $x_3 = x_1 - x_2$

c) $x_3 = (x_1 + x_2)/2$

d) $x_3 = (x_1 - x_2)/2$.

Invarians under skalförändring. I detta fall är en orienterad linje med en punkt O, kallad origo given; vi kan tänka oss att det är x-axeln. Däremot är längdenheten inte fixerad utan skall varieras. Om $\bar{e}$ är en positivt riktad vektor av enhetslängd, så definierar vi på vanligt sätt koordinaten x för punkten P genom

$$\overline{OP} = x\bar{e} \ .$$

Om vi väljer en ny längdenhet, dvs en ny enhetsvektor $\bar{e}'$ så får P på analogt sätt koordinaten x', där

$$\overline{OP} = x'\bar{e}' \ .$$

Om kvoten mellan längderna betecknas med k , dvs $\bar{e} = k\bar{e}'$, så gäller tydligen

(5) $\qquad x' = kx$.

Koordinattransformationen (5) kallas för en skalförändring. Samma transformation är givetvis aktuell då det är fråga om andra fysikaliska storheter än lägen på en linje, t.ex. hastighet, massa, tryck, elektrisk strömstyrka osv.

Att en funktion är invariant under (godtyckliga) skalförändringar definieras analogt med translationsinvarians. Exempelvis sägs en funktion av två koordinater $f(x_1,x_2)$ vara invariant under skalförändringar, om

$$f(x_1',x_2') = f(x_1,x_2)$$

dvs

$$f(kx_1,kx_2) = f(x_1,x_2)$$

för alla $k \neq 0$ och för alla x_1 och x_2 .

<u>Exempel 9</u>. Vilka av följande uttryck är invarianta under skalförändringar?

a) $x_1 + x_2$

b) x_1/x_2

<u>Lösning</u>. a) Av formel (5) dvs $x_1' = kx_1$, $x_2' = kx_2$, får vi

$$f(x_1',x_2') = x_1' + x_2' = k(x_1 + x_2) = kf(x_1,x_2) .$$

Om $k \neq 1$ och $x_1 + x_2 \neq 0$, så är alltså $x_1 + x_2 \neq x_1' + x_2'$. Uttrycket är därför inte invariant.

b) Vi får på samma sätt

$$x_1'/x_2' = (kx_1)/(kx_2) = x_1/x_2 .$$

Uttrycket är således invariant.

<u>Övning 19.</u> Vilka av nedanstående uttryck är invarianta under skalförändringar?

a) $x_1 - x_2$

b) $(x_1 + x_2)/x_1$

c) $x_1x_2/(x_1^2 + x_2^2)$

d) $x_1x_2/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Innebörden av att ett <u>samband</u> mellan två eller flera koordinater är invariant under skalförändringar kan lätt förstås i analogi med det föregående.

Övning 20. Vilka av nedanstående samband är invarianta under skalförändringar?

a) $x_3 = x_1 + x_2$

b) $x_3 = 2x_1 - x_2$

c) $x_3 = x_1 x_2$

d) $x_3 = \sqrt{|x_1 x_2|}$

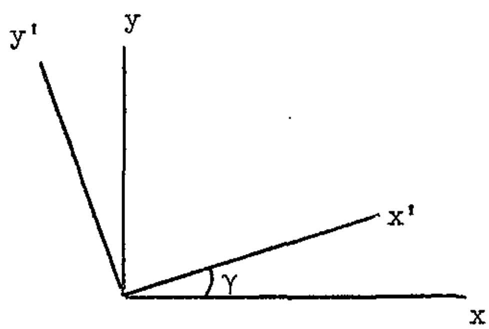
e) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

f) $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$

g) $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$

h) $x_1^2\, x_2 = x_3^3$

Rotationsinvarians. Verkligt intressant blir frågan om invarians först då man studerar flerdimensionella storheter, t.ex. lägen hos punkter i ett plan (eller i en rymd). Låt ett rätvinkligt koordinatsystem (xy) vara givet i planet. Inför ett nytt rätvinkligt koordinatsystem (x'y') med samma origo som förut, men med nya axelriktningar på så sätt att x'-axeln bildar vinkeln γ med x-axeln, räknat i positiv led.



Sambandet mellan nya och gamla koordinater kan då skrivas (CJ sid. 361)

$$x' = x \cos \gamma + y \sin \gamma \tag{6}$$
$$y' = - x \sin \gamma + y \cos \gamma .$$

eller

$$x = x' \cos \gamma - y' \sin \gamma \tag{7}$$
$$y = x' \sin \gamma + y' \cos \gamma .$$

Formlerna (6) och (7) skiljer sig tydligen åt blott genom platsen för minustecknet. Detta är naturligt, eftersom byte av x' mot x och y' mot y svarar mot teckenändring hos γ, och $\cos(-\gamma) = \cos \gamma$, $\sin(-\gamma) = - \sin \gamma$.

I analogi med det föregående sägs en funktion f av ett koordinat-par (x,y) vara rotationsinvariant, om

(8) $$f(x',y') = f(x,y)$$

för alla (x,y) och γ. Här förutsätts givetvis att primade och o-primade koordinater hänger ihop genom transformationsformlerna (6), (7). En funktion $f(x_1,y_1,x_2,y_2)$ av två koordinatpar (x_1,y_1) och (x_2,y_2) sägs vara rotationsinvariant, om

$$f(x_1',y_1',x_2',y_2') = f(x_1,y_1,x_2,y_2)$$

för alla (x_1,y_1), (x_2,y_2) och alla γ.

Exempel 10. Vilka av följande uttryck är rotationsinvarianta?

a) $x^2 + y^2$

b) $x + y$.

Lösning. a) Av formlerna (6) får vi

$$(x')^2 + (y')^2 = x^2 \cos^2 \gamma + 2xy \cos \gamma \sin \gamma + y^2 \sin^2 \gamma +$$

$$+ x^2 \sin^2 \gamma - 2xy \cos \gamma \sin \gamma + y \cos^2 \gamma = x^2 + y^2 .$$

Uttrycket är alltså invariant.

b) Av (6) fås

$$x' + y' = x(\cos \gamma - \sin \gamma) + y(\sin \gamma + \cos \gamma) .$$

För de flesta värden på x, y och γ kommer tydligen $x + y$ och $x' + y'$ att ha olika värden (undantag är γ = heltalsmultipel av $\pi/2$, pröva själv!). För t.ex. $\gamma = \pi/4$ blir

$$x' + y' = \sqrt{2}\, y ,$$

vilket uppenbarligen inte är lika med $x + y$ för alla x,y. Uttrycket $x + y$ är alltså inte invariant.

Övning 21. Vilka av följande uttryck är rotationsinvarianta?

a) $x^2 - y^2$

b) $x_1x_2 + y_1y_2$

c) $x_1y_2 - x_2y_1$

d) $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

e) $(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$

f) $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

Kap. 4.1k

För att beräkna arean under kurva given på formen $y = f(x)$ kan man givetvis använda formeln

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

Om kurvan är given i polära koordinater $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, så kan man använda formeln

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b f(\theta)^2\,d\theta$$

som förklaras längst ned på sid. 371.

Övning 22. Sök arean av det område som begränsas av

a) kurvan $y = 1/(1 + x^2)$, x-axeln, y-axeln och linjen $x = 1$.

b) kurvan $y = x\,e^{-x}$, x-axeln och linjen $x = 2$.

Övning 23. Sök arean av det cirkelsegment som avgränsas av en diameter i en cirkel med radie R och en linje parallell med samma diameter på avståndet $R/2$ från denna. Ledning: Om Du får en integral innehållande uttrycket $\sqrt{R^2 - x^2}$, gör substitutionen $x = R \sin t$.

Övning 24. a) Skissera kurvan $r = a \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ $(a > 0)$. Beräkna arean av det område som omsluts av kurvan.

b) Samma uppgift för kurvan $r = a(1 - \sin(\theta/2))$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Övning 25. Beräkna arean av det område som begränsas av x-axeln, linjen $x = 2y$ och ellipsen $(x^2/4) + y^2 = 1$.

I många fall måste man själv beräkna integrationsgränserna för den integral som ger den sökta arean. Vi visar ett exempel på detta.

Exempel 11. Beräkna arean av det område som begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = x + 6$.

Lösning. Vi bestämmer x-koordinaterna för de bägge skärningspunkterna mellan parabeln och linjen (rita figur) ur ekvationen $x^2 = x + 6$ som har rötterna -2 och 3. Den sökta arean är lika med skillnaden mellan arean under linjen och arean under parabeln, alltså

$$\int_{-2}^{3} (x + y)\,dx - \int_{-2}^{3} x^2\,dx = 20\,\frac{5}{6} \ .$$

Övning 26. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 5x^2$ och $y = 1 + 2x^2$.

Övning 27. Beräkna ett närmevärde till arean av det område som begränsas av kurvan $y = e^{-x}$, y-axeln och linjen $y = x$.

Låt C vara ett kurvstycke med ekvation i parameterform

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta .$$

Uttrycket

$$(1) \qquad \int_C y\,dx$$

definieras då (CJ sid. 367) som

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta y\dot{x}\,dt = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,dt$$

På analogt sätt definieras uttrycket

$$(3) \qquad \int_C x\,dy .$$

En och samma kurva kan ju parametriseras på många olika sätt. Det är viktigt att förstå att uttrycket (1) (liksom (3)) har samma värde för alla val av parametrisering för ett och samma kurvstycke. (Om det inte förhöll sig så så skulle ju ovanstående definition av (1) och (3) leda till en orimlighet; varför?). Vi ger en övning som illustrerar detta.

Övning 28. Låt C vara kurvstycket $y = x^{2/3}$, $0 \leq x \leq 8$. Kurvstycket kan parametriseras på bl.a. följande tre sätt

(A) $\qquad x = t, \quad y = t^{2/3}, \quad 0 \leq t \leq 8$

(B) $\qquad x = u^3, \quad y = u^2, \quad 0 \leq u \leq 2$

(C) $\qquad x = v^{3/2}, \quad y = v, \quad 0 \leq v \leq 4 .$

a) Visa att integralen (2) har samma värde för alla tre parametriseringarna.

b) Det gemensamma värdet av de tre integralerna som nyss beräknades är ju $\int_C y\,dx$ enligt definitionen. Beräkna även $\int_C x\,dy$. Tolka dessa bägge integraler som areor.

c) Låt $\phi(w)$ vara en godtycklig deriverbar funktion på $0 \leq w \leq \beta$ sådan att $\phi'(w) > 0$ för alla w, och $\phi(0) = 0$, $\phi(\beta) = 8$. Bilda en parametrisering av kurvstycket C genom

$$x = \phi(w), \quad y = \phi(w)^{2/3}, \quad 0 \leq w \leq \beta$$

(observera att $\phi(w) > 0$ för $0 < w \leq \beta$) . Visa att uttrycket (2) har samma värde för denna parametrisering som för de tre parametriseringarna (A), (B), (C).

<u>Övning 29</u>. a) Beräkna arean mellan x-axeln och kurvan $y = 1 - x^2$.

b) Sätt $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos^2 t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Beräkna integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y\dot{x}dt$$

(CJ sid. 365-366).

c) Verifiera att integralen i b) genom substitutionen $x = \sin t$ övergår i det vanliga uttrycket för arean A, nämligen

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx .$$

d) Låt C vara den orienterade slutna kurvan bestående av x-axeln från $x = -1$ till $x = 1$ samt av parabelbågen $y = 1 - x^2$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$. Verifiera att arean inom C är lika med

$$-\int_C ydx .$$

<u>Kap. 4.11-n</u>

Se Övningar i integralkalkyl av Gunnar Edvinsson.

Kap. 4.2-4.9

Övning 30. En partikel med massan m glider utan friktion nedför parabeln $y = 2px^2$. Partikeln startar från en punkt på höjden h över x-axeln.

a) Beräkna hastigheten när partikeln passerar origo.

b) Beräkna storleken av normalkraften från parabeln på partikeln när den passerar origo.

c) Formulera ett uttryck för den tid T som det tar för partikeln att glida ned till origo.

Övning 31. En partikel med massan m rör sig i ellipsbanan $\bar{r} = (A \cos \omega t, B \sin \omega t)$, där t är tiden.

a) Beräkna hastighetsvektorn $\bar{v}$ som funktion av tiden.

b) Beräkna accelerationsvektorn $\bar{a}$ som funktion av tiden.

c) Visa att partikeln påverkas av en centralkraft.

d) Visa att i punkterna $(A,0)$ och $(0,B)$ gäller att

$$|\bar{a}| = v^2/\rho ,$$

där ρ är banans krökningsradie (i respektive punkt).

e) Undersök om sambandet $|\bar{a}| = v^2/\rho$ gäller i alla punkter på kurvan.

Övning 32. Låt $f(x)$ vara en monotont växande deriverbar funktion i intervallet $[0,a]$, $f(0) = 0$. En partikel startar från vila i punkten $(a,f(a))$ och glider under inverkan av tyngdkraften utan friktion längs kurvan $y = f(x)$. Ange ett uttryck för den tid som åtgår tills partikeln når origo.

Övning 33. En partikel med massan m rör sig på x-axeln från puntken x_1 till punkten x_2 under inflytande av kraften $\bar{F}(x) = F(x)\bar{e}_x$. Inför beteckningarna

det av kraften uträttade arbetet $\quad W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$

partikelns kinetiska energi $\quad E_k = mv^2/2$.

Definiera vidare den potentiella energin $E_p(x)$ (så när som på en additiv konstant) genom ekvationen

$$-\frac{dE_p(x)}{dx} = F(x) .$$

a) Bevisa, utgående från Newtons rörelselag, likheterna

$$(1) \qquad W_{12} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = E_{k,2} - E_{k,1}$$

(2) $$W_{12} = E_{p,1} - E_{p,2}$$

(Index 1 och 2 avser värdena av respektive variabel i punkten x_1 respektive x_2.) Ledning: gör variabelsubstitutionen $x = x(t)$, t tiden, i integralen som definierar W_{12}.

b) Visa, likaledes utgående från Newtons rörelselag, att den totala energin $E = E_p + E_k$ är konstant under rörelsen (som funktion av tiden).

c) Visa slutligen följande omvändning till påståendet i b). Om $E = E_p + E_k$ är konstant, så måste kraftekvationen $m\dot{v} = F(x)$ gälla under hela rörelsen.

Övning 34. Låt $E_p(x)$ och $F(x)$ ha samma betydelse som i föregående uppgift. Antag att $E_p(x) = k \log |x|$, $x \neq 0$. Beräkna $F(x)$. Åt vilket håll är kraften riktad om $k < 0$?

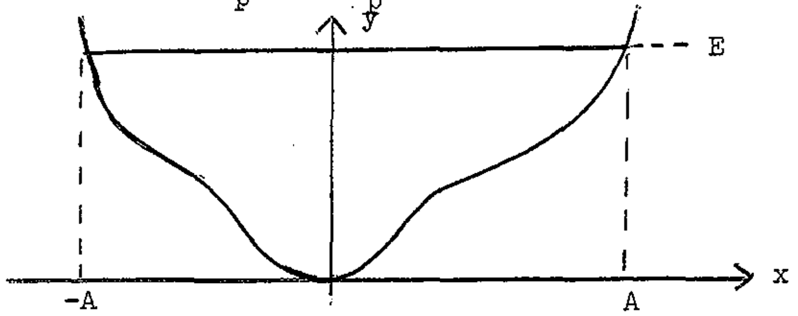
Övning 35. Beteckningar såsom i Övning 33. Beräkna $E_p(x)$ om $F(x)$ är

a) $-kx^2$ d) k/x^2

b) kx e) k/x^n

c) k/x

Övning 36. En partikel med massan m rör sig på x-axeln i den symmetriska potentiella energin $E_p(x)$. ("Symmetrisk" innebär här att $E_p(x)$ är en jämn funktion, dvs $E_p(x) = E_p(-x)$ för alla x). Antag att den totala



energin E är lika med $E_p(A) = E_p(-A)$. Partikeln svänger fram och tillbaka mellan $x = A$ och $x = -A$. Härled ett uttryck för svängningstiden T.

Övning 37. Beräkna T i föregående uppgift om $E_p(x) = p|x|$ där p är en konstant.

Övning 38. Beräkna T i Övning 36 om $E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2$. Visa att T inte beror av A i detta fall.

Övning 39. Beteckningar enligt Övning 36. Visa att om $E_p(x)$ är deriverbar i slutna intervallet $[-A,A]$ så är integralen för T alltid konvergent.

<u>Övning 40</u>. En partikel med massan m är i vila i punkten $x = x_o > 0$ på x-axeln. Den påverkas av kraften $F(x) = -\frac{k}{x^2}$, $k > 0$.

a) Beräkna hastigheten v som funktion av x.

b) Beräkna ett uttryck för den tid T som det tar för partikeln att falla in till origo.

c) Om Du kan och orkar, lös integralen i uttrycket för T. Om inte, visa ändå att T är proportionell mot $x_o^{3/2}$.

Svar kap. 4.

3. a) $x = 2t,\ y = 1 - t,\ 0 \leq t \leq 1$

b) $x = 3 + 2\cos t,\ y = 5 + 2\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $x = 2t^2 + 1,\ y = t,\ -1 \leq t \leq 1$

d) $x = t,\ y = 2$ för $-2 \leq t \leq 0$, $x = \cos(\frac{\pi}{2} - t),\ y = 1 + \sin(\frac{\pi}{2} - t)$ för $0 \leq t \leq \pi$.

5. a) $\eta - \sqrt{3} = (-1/\sqrt{3})(\xi - 1)$

b) $\eta - \sqrt{2} = 2\xi + \sqrt{2}$

c) $3(\eta - 1) = \xi - 2$

6. Tangent $\eta = -2\xi$, normal $\xi = 2\eta$.

7. Kurvan har två grenar genom origo svarande mot $t = 0$ (eller 2π) respektive $t = \pi$. Tangenternas ekvation $\eta = 2\xi$ resp. $\eta = -2\xi$, normalernas $\xi = -2\eta$ resp. $\xi = 2\eta$.

8. a) sinh A

b) $(13^{3/2} - 8)/27 \approx 1{,}44$

c) $(e^3 - e)\sqrt{2}$

d) π

e) $((\frac{\pi^2}{4} + 4)^{3/2} - 8)/3 \approx 2{,}82$

9. 8a

10. a) Exempelvis $x = s/\sqrt{a^2 + 1}$, $y = b + as/\sqrt{a^2 + 1}$, $s \in R$

b) Exempelvis $x = \log(s + \sqrt{1 + s^2})$, $y = \sqrt{1 + s^2}$, $s \in R$

11. $(\frac{a^2 + b^2}{2})^{3/2}/(ab)$

12. a) $1/(2a)$

b) $\sqrt{2}$

13. Krökningen är störst i punkten $(5^{1/6}, 5^{-1/3})$.

14. Sladdningsrisken är störst där krökningen är störst, dvs i punkten $(-\frac{1}{2}\log 2,\ 1/\sqrt{2})$.

17. (a) och (f) är translationsinvarianta.

18. Endast (c) kan komma ifråga, ty sambanden (a), (b) och (d) är inte transla-

tionsinvarianta.

19. (b) och (c) .

20. (a), (b), (d), (f), (g) och (h) .

21. (b), (c), (d) och (e) .

22. $\pi/4$

23. $R^2(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}) \approx 0,96\ R^2$

24. a) $\pi a^2/4$

    b) $a^2(\frac{3\pi}{2} - 4) \approx 0,71a^2$

25. $\pi/4$

26. $4\sqrt{3}/9$

27. 0,27

28. $\int_C ydx = 19,2$, $\int_C xdy = 12,8$.

29. a) 4/3

30. a) $\sqrt{2gh}$

    b) mg + 8mgph

    c) $T = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + 4p^2x^2}}{2\sqrt{gp(x_0^2 - x^2)}}\, dx$, där x_0 är x-koordinaten för utgångspunkten, dvs $h = 2px_0^2$

31. a) $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = (-\ \omega A \sin \omega t,\ \omega B \cos \omega t)$

    b) $\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = -\ \omega^2(A \cos \omega t,\ B \sin \omega t) = -\ \omega^2\bar{r}$

    c) $\bar{F} = m\bar{a} = -\ m\omega^2\bar{r}$ är alltid riktad från partikeln i riktning mot origo

    e) Nej. Att sambandet gäller i punkterna (A,0) och (0,B) beror på att accelerationsvektorn i dessa punkter är normal mot kurvan. Allmänt gäller att $a_n = v^2/\rho$, där a_n är komponenten av $\bar{a}$ i kurvans normalriktning.

32. $\int_0^a \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2g(h - f(x))}}\, dx$

34. $F(x) = -\ k/x$. Kraften är riktad bort från origo, om $k < 0$.

35. a) $kx^3/3$ d) $-k/x$

b) $-kx^2/2$ e) $-\dfrac{k}{(n-1)x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$

c) $-k \log |x|$

I samtliga fall är $E_p(x)$ bestämd blott så när som på en additiv konstant.

36. $2\sqrt{2m} \int_0^A \dfrac{dx}{\sqrt{E_p(A) - E_p(x)}}$

37. $4\sqrt{2Am/p}$

38. $2\pi\sqrt{m/k}$

40. a) $v = \sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right)}$, $0 < x < x_0$

b) $T = \sqrt{\dfrac{m}{2k}} \int_0^{x_0} \sqrt{\dfrac{xx_0}{x_0 - x}}\, dx = \sqrt{\dfrac{m}{2k}}\; cx_0^{3/2}$,

där $c = \int_0^1 \sqrt{z/(1-z)}\,dz$.

KAPITEL 5

Kap. 5.3

Exempel 1. Skriv polynomet $f(x) = x^2$ som en summa av potenser av $x - 2$, dvs bestäm c_k så att

$$f(x) = c_0 + c_1(x - 2) + c_2(x - 2)^2 .$$

Verifiera att $c_k = f^{(k)}(2)/k!$ för $k = 0, 1, 2$.

Lösning. (Jfr 5.3 a i CJ) Sätt $x = 2 + h$ och utveckla kvadraten

$$f(x) = f(2 + h) = (2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2 =$$
$$= 4 + 4(x - 2) + (x - 2)^2 .$$

Vi har alltså $c_0 = c_1 = 4$, $c_2 = 1$. Vi finner vidare att $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 2$, vilket stämmer med formeln för c_k .

Övning 1. Sätt $f(x) = x^3 - x$. Bestäm c_k , $k = 0, 1, 2, 3$, så att identiteten

$$f(x) = c_0 + c_1(x - 3) + c_2(x - 3)^2 + c_3(x - 3)^3$$

gäller. Verifiera att $c_k = f^{(k)}(3)/k!$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Övning 2. a) Sätt

$$f(x) = 7 - 3x^2 + 11x^3 - 5x^4 + 13x^7 .$$

Beräkna $f^{(4)}(0)$.

b) Sätt $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k x^k$. Beräkna $f^{(n)}(0)$ (uttryckt i koefficienterna c_k) för varje heltal $n \geq 0$.

Övning 3. Genom att betrakta $f(x) = 1/(1 - x)$ som summan av en geometrisk serie inser vi att identiteten

$$f(x) = 1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_0^\infty x^k ,$$

gäller för $|x| < 1$. Verifiera, t.ex. för $k = 0, 1, 2, 3, 4$ - helst för alla k - att formeln $c_k = f^{(k)}(0)/k!$ gäller även i detta fall, dvs här

$$1 = f^{(k)}(0)/k! .$$

Kap. 5.4

Antag att för en viss funktion f vi känner $f(0)$ och $f'(0)$ och vill snabbt och lätt skaffa oss ett närmevärde för $f(h)$, där h är ett litet tal. Eftersom

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0),$$

så vet vi att $(f(t) - f(0))/t$ är nära $f'(0)$, om t är tillräckligt liten. Det är därför naturligt att förmoda att

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \approx f'(0) ,$$

och således

$$f(h) \approx f(0) + h\cdot f'(0) .$$

Uttrycket i högra ledet ovan blir därför vårt närmevärde för $f(h)$.

Exempel 2. Ange ett närmevärde till

a) $\ln 1.05$

b) $\sqrt{4.12}$.

Lösning. a) om $f(x) = \ln(1 + x)$, så är $f'(x) = 1/(1 + x)$ och således $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ och vårt närmevärde blir $0 + 0.05\cdot 1 = 0.05$.

b) $f(x) = \sqrt{4 + x}$ ger $f(0) = 2$, $f'(0) = 1/4$, varav närmevärdet $2 + 0.12\cdot(1/4) = 2.03$.

Övning 4. Ange ett närmevärde för

a) $e^{0.02}$

b) $\sqrt{1.06}$

c) $\sqrt{3.92}$

Det är nu naturligt att fråga sig hur stort felet är i de närmevärden som beräknas på detta sätt. Taylors formel ger ett svar på denna fråga. Om vi väljer $n = 1$ i formel (22) och för enkelhets skull tar $a = 10$ så får vi

$$f(h) = f(0) + h\cdot f'(0) + R_1 ,$$

där R_1 är given t.ex. av (20) eller (21), dvs

$$R_1 = \frac{h^2}{2} f''(\xi) ,$$

för någon punkt ξ i intervallet $[0,h]$. Termen R som ju är felet i närmevärdet $f(0) + h\cdot f'(0)$, kan således uppskattas med hjälp av andra-derivatan till funktionen.

Exempel 3. Ge en uppskattning av felet hos de närmevärden som beräknades i Exempel 2.

Lösning. a) Om $f(x) = \ln(1 + x)$, så är $f''(x) = -1/(1 + x)^2$ och således $|f''(\xi)| \leqq 1$, eftersom $0 \leqq \xi \leqq 0.05$ och således $\xi \geqq 0$. Vi får alltså

$$|R_1| \leqq \frac{0.05^2}{2} \cdot 1 < 0.0013 .$$

Felet är således < 0.0013.

b) $f(x) = \sqrt{4 + x}$ ger $f''(x) = -(1/4)(4 + x)^{-3/2}$ och således

$$|f''(\xi)| \leqq (1/4)\cdot 4^{-3/2} = 1/32 ,$$

eftersom $\xi \geqq 0$. Alltså

$$|R_1| \leqq \frac{0.12^2}{2} \cdot \frac{1}{32} < 0.0003 .$$

Felet är alltså < 0.0003 .

Övning 5. Ge en uppskattning av felet i de närmevärden som Du beräknade i Övning 4.

Ledning till Övning 5 c. Eftersom $-0.08 \leqq \xi \leqq 0$, så är $4 + \xi > 3$, varför man exempelvis kan använda uppskattningen

$$1/(4 + \xi)^{3/2} < 1/3^{3/2} < 1/1.7^3 < 1/3 .$$

(Observera att det räcker med tämligen grova uppskattningar!)

Om man behöver noggrannare närmevärde, så kan man ta med en eller flera ytterligare termer i Taylors formel. Med $n = 2$ lyder formeln

(1) $$f(h) = f(0) + h\cdot f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + R_2 ,$$

(2) där $$R_2 = \frac{h^3}{3!} f'''(\xi)$$

för något ξ i intervallet $[0,h]$.

Övning 6. Beräkna närmevärden för de tre uttrycken i Övning 4 med hjälp av formel (1). Använd fem decimaler. Uppskatta felet med hjälp av (2). Kontrollera Din feluppskattning med hjälp av fickkalkylator, om Du har tillgång till en sådan.

Övning 7. Beräkna ett närmevärde till $e^{0.2}$ med hjälp av Taylors formel med $n = 3$. Uppskatta resttermen, som i detta fall kan skrivas $R_3 = (h^4/4!)f^{(4)}(\xi)$ för något ξ i intervallet $[0,h]$.

Exempel 4. Beräkna ett närmevärde till $\sin 0.1$ med tre korrekta decimaler.