Kungl. Boktr. Sthlm 1941
416045

B. WAHLSTRÖM

MATEMATISKA UPPGIFTER

GIVNA I STUDENTEXAMEN PÅ REALLINJEN

V. T. 1896—V. T. 1941

URVAL FÖR

SPECIALKURS

Stockholm

Svenska Bokförlaget

P. A. Norstedt & Söner

MATEMATISKA UPPGIFTER

GIVNA I STUDENTEXAMEN PÅ

REALLINJEN

V. T. 1896—V. T. 1941

URVAL MED SVAR OCH ANVISNINGAR FÖR

SPECIALKURS

AV

B. WAHLSTRÖM

ADJUNKT VID HÖGRE REALLÄROV.
Å NORRMALM

TREDJE UPPLAGAN

STOCKHOLM

SVENSKA BOKFÖRLAGET

P. A. Norstedt & Söner

STOCKHOLM 1941
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
416045

FÖRORD TILL TREDJE UPPLAGAN.

Det stora antalet nytillkomna uppgifter (efter H. T. 1938) har nödvändiggjort en kraftig utgallring av exempel i andra upplagan, huvudsakligen sådana av äldre datum. En nummerförteckning över de utgallrade exemplen återfinnes nedan, om någon lärare eventuellt vill använda dessa vid provskrivningar. En del av dem finnas dock nu i samlingen uppgifter för »Allmän kurs», 8:e uppl. De hade nämligen tidigare intagits i *båda* samlingarna, då tveksamhet rådde, huruvida de borde hänföras till »Allm. kurs» eller »Special-kurs». Denna tveksamhet har dock undanröjts efter undervisningsrådet *C. E. Sjöstedts* anvisningar i början av detta år rörande fördelningen av olika partier av funktionsläran och analytiska geometrien på de olika »kurserna».

Materialet har även omgrupperats, då den tidigare följda grupperingen ej visat sig vara rationell. Att strängt skilja på »Funktionslära» och »Analytisk geometri» är ofta svårt, men jag hoppas, att det genom den nya grupperingen skall bli lättare än förut för lärare och elever att finna exempel av önskad typ. Alla uppgifter på »Algebraiska kurvor» ha förts under rubriken »Analytisk geometri». Max.- och min.-uppgifter på »Räta linjen» och »Andragradskurvorna» återfinnas sist under dessas resp. rubriker. Problem på geometriska orter ha sammanförts till ett särskilt avsnitt.

De sista skrivningarnas uppgifter ha kommenterats i större utsträckning än tidigare, dels på grund av att tiden ej torde medgiva att exempel ur denna samling behandlas under lärarens ledning i samma utsträckning som tidigare, dels på grund av att jag tyckt mig finna en ganska bestämd stegring av den genomsnittliga svårighetsgraden.

En nummerförteckning över de exempel, som givits vid var och en av de sista tolv skrivningarna, är avsedd att underlätta uppsökandet av dessa exempel, om en »hel skrivning» önskas behandlad vid något tillfälle.

För råd och anvisningar samt för påpekande av ev. tryckfel och andra fel är jag tacksam.

Stockholm i juli 1941.

B. Wahlström.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

		Sid.
I.	Algebra, trigonometri m. m.	1
II.	Funktionslära.	
	a. Algebraiska funktioner	1
	b. Trigonometriska funktioner	2
	c. Tillämpningsuppg. å max. och min.	4
III.	Analytisk geometri.	
	a. Räta linjen	7
	b. Kurvor i allmänhet	8
	c. Cirkeln	12
	d. Ellipsen	12
	c. Hyperbeln	16
	f. Parabeln	20
	g. Geometriska orter	24
Svar och anvisningar		29

NUMMERFÖRTECKNING

på uppgifter, givna de 12 senaste skrivningarna

Aug. 1938: 17, 18, 86, 119, 155, 156, 207.
H. T. 1938: 19, 29, 87, 157, 187, 188, 246.
Jan. 1939: 20, 49, 75, 120, 158, 189, 247.
V. T. 1939: 21, 88, 121, 135, 159, 190, 217.
Aug. 1939: 38, 89, 100, 122, 160, 191, 248.
H. T. 1939: 55, 90, 91, 123, 136, 161, 192.
Jan. 1940: 6, 22, 50, 137, 162, 193, 249.
V. T. 1940: 23, 39, 77, 124, 163, 194, 227.
Aug. 1940: 40, 51, 65, 92, 164, 195, 250.
H. T. 1940: 24, 52, 66, 78, 125, 165, 196.
Jan. 1941: 25, 93, 94, 138, 166, 197, 218.
V. T. 1941: 26, 95, 126, 167, 198, 199, 209.

NUMMERFÖRTECKNING

på uppgifter i andra upplagan, vilka utgallrats i tredje upplagan.

1—15, 17—20, 34—36, 43, 46, 47, 50—53, 55, 60, 61, 63—71, 75—77, 79, 80, 82—84, 86—89, 99, 106—108, 110, 111, 113, 120, 123—127, 131, 132, 135, 140—159, 176, 177, 185—200, 207, 209, 215—218, 227—244, 259—263, 265.

Av dessa exempel finnas följande i samlingen av uppgifter för »Allmän kurs», 8:e uppl.: 1—14, 17, 18, 20, 34, 35, 51, 52, 53, 55, 60, 61, 63, 65—71, 75, 76, 77, 79, 80, 82, 83, 84, 106, 107, 108, 110, 111, 113, 120.

I. Algebra, trigonometri m. m.

1. Två trianglar, ABC och $A_1B_1C_1$, äro givna. Sidorna BC och B_1C_1 äro lika stora. Triangeln ABC är spetsvinklig, $A_1B_1C_1$ trubbvinklig, och vinklarna A och A_1 äro supplementvinklar. Vinklarna B och B_1 äro komplementvinklar. Visa, att även vinklarna C och C_1 äro komplementvinklar och att förhållandet mellan ytan av triangeln $A_1B_1C_1$ och ytan av triangeln ABC är $\cot B \cdot \cot C$. (V. T. 1937.)

2. Ekvationerna $ax^2 + 2bx + c = 0$ och $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$ ha rötterna x_1 och x_2 resp. x_3 och x_4. Visa, att om för dessa gäller sambandet $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} = \frac{2}{x_1 - x_2}$, så är $ac_1 + a_1c = 2bb_1$. (Aug. 1937.)

3. En likbent triangels omkrets är $2p$; den omskrivna cirkelns radie är R. Visa, att ytan av den triangel, vars hörn utgöras av medelpunkterna i de vid den likbenta triangeln vidskrivna cirklarna, är $2pR$. (H. T. 1937.)

II. Funktionslära.

a. Algebraiska funktioner.

4. För vilket värde på x har uttrycket

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$ ett maximum? (H. T. 1918.)

5. Vilket värde antager andra derivatan till funktionen $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ för det värdet på x, för vilket första derivatan antager värdet 2? (Jan. 1938.)

6. Bestäm koefficienterna a och b, så att funktionen $\frac{x^2 + ax}{x + b}$ får ett maximivärde $= 3$ för $x = -3$. (Jan. 1940.)

7. Finnas några reella värden, som funktionen $\dfrac{3x-5}{4x^2-7x+1}$ icke kan antaga för reella värden på x? (V. T. 1908.)

8. Finns det några värden, som funktionen $\dfrac{3x^2+20}{3x-2}$ ej kan antaga för reella värden på x? (V. T. 1922.)

---

b. Trigonometriska funktioner.

9. Angiv maxima och minima samt skärningspunkterna med x-axeln för kurvan $y = \sin 2x + \cos x$. (H. T. 1916.)

10. Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$2 \sin x + \sin 2x. \qquad \text{(V. T. 1921.)}$$

11. Bestäm derivatan till den funktion y av variabeln x, som definieras genom ekvationen $\operatorname{tg} y = a \cot x$, där a är en konstant. (Derivatan skall uttryckas som funktion av x.) (V. T. 1924.)

12. Sök maxima och minima för funktionen

$$y = \sin \frac{x}{2} + \cos x. \qquad \text{(V. T. 1926.)}$$

13. Bestäm maximi- och minimipunkterna på kurvan $y = \cos^2 x + 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$ och teckna kurvan i stora drag. (V. T. 1933.)

14. Bestäm maxima och minima för funktionen $y = \cot x + 3\operatorname{tg} x$ och angiv mellan vilka gränser de värden ligga, som funktionen icke kan antaga. (H. T. 1935.)

15. Bestäm konstanterna a, b och c, så att funktionen $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + c$ får ett maximum $= 4$ för $x = 30°$ och ett minimum $= 3$ för $x = 90°$. (V. T. 1937.)

16. Om v är en vinkel, som ligger mellan 0° och 30°, är $60 \sin v$ approximativt lika med vinkelns gradtal. Vilket är det största värde differensen kan antaga? (V. T. 1938.)

17. Undersök om funktionen $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ $(0 < x < \pi)$ har något maximum eller minimum. Om så är fallet, angiv detta och motsvarande värde på x. (Aug. 1938.)

18. Om $x = \sin 2y + \cos 2y$, härled för $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ ett uttryck, som innehåller endast variabeln x. (Aug. 1938.)

19. Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$y = \sin x\,(1 + \cos x)^2$$

och angiv kurvans utseende för $0 \leqq x \leqq 2\pi$. (H. T. 1938.)

20. Till kurvan $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$ drages tangenten i den punkt, där kurvan skär y-axeln. Bestäm de punkter på kurvan, som äro så belägna, att tangenterna i dessa punkter bilda 60° vinkel med den förra tangenten. (Jan. 1939.)

21. Sök maxima och minima av funktionen

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + \tfrac{1}{2} \sin x \cos x. \qquad \text{(V. T. 1939.)}$$

22. Konstruera kurvan

$$y = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}. \qquad \text{(Jan. 1940.)}$$

23. Bestäm den konstanta koefficienten a i ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0.$$

så att ekvationen för alla x-värden satisfieras av $y = \sin x$. Bevisa, att ekvationen för detta värde på a satisfieras även av $y = \cos x$. (V. T. 1940.)

24. Origo sammanbindes med den närmaste maximipunkten i första kvadranten på kurvan $y = \sin x$. En rät linje parallell med y-axeln skär kurvan i A (mellan origo och den nämnda maximipunkten) och den nyss nämnda sammanbindningslinjen i B. Sök maximum av sträckan AB. (H. T. 1940.)

25. Sök maximi- och minimivärdena av funktionen

$$\cos 2x - 2 \sin x - 1. \qquad \text{(Jan. 1941.)}$$

26. Hypotenusan i en rätvinklig triangel betecknas med a, kateterna med b och c. Uttrycket

$$\frac{a\,(b + c)}{bc}$$

antar olika värden, då den rätvinkliga triangelns form ändras. För vilken triangel antar uttrycket det minsta värdet? (V. T. 1941.)

---

27. Bestäm med användande av grafisk konstruktion på en 10-dels grad när värdet av medelpunktsvinkeln i en cirkelsektor (radien $= 1$), vilkens yta delas mitt itu av den korda, som sammanbinder sektorbågens båda ändpunkter. (V. T. 1916.)

28. På en cirkellinje med radien 1 dm är avsatt en båge AB sådan, att om tangenter AT och BT dragas till bågen genom A och B, avståndet mellan deras skärningspunkt T och endera av punkterna A och B är lika med längden av bågen AB. Bestäm genom grafisk konstruktion denna längd på 1 cm när. (V. T. 1919.)

29. I en cirkelsektor OAB är O cirkelns medelpunkt, A och B sektorbågens ändpunkter. Kordan AB drages. Bestäm medelst grafisk konstruktion sektorns medelpunktsvinkel på 1° när, om omkretsen av triangeln OAB är dubbelt så stor som bågen AB. (H. T. 1938.)

---

c. Tillämpningsuppgifter å max. och min.

30. Två koncentriska cirklar (radier R och r) äro givna. Vilken är den största rektangel, som i dem kan inskrivas på det sätt, att två dess hörn ligga på vardera cirkeln? (V. T. 1902.)

31. $ABCD$ är en given kvadrat. Genom A drages en rät linje, som skär sidan BC i P och sidan DC:s förlängning åt C till i E. Hur lång bör sträckan PB väljas, för att summan av ytorna av trianglarna ABP och PCE skall bliva så liten som möjligt? Kvadratens sida $= a$. (V. T. 1928.)

32. En cirkel med medelpunkten M och radien r är given. En liksidig triangel har två av sina hörn A och B på cirkelns periferi. Hur stor skall vinkeln AMB vara, för att avståndet från triangelns tredje hörn till M skall bli så stort som möjligt? (V. T. 1931.)

33. I cirkelsektorn AOD, där O betecknar cirkelns medelpunkt, är bågen AD en fjärdedel av cirkelns hela omkrets. På bågen AD väljer man två punkter B och C så, att kordan BC blir parallell med kordan AD, och fullbordar femhörningen $OABCD$. Hur stor skall medelpunktsvinkeln BOC väljas, för att femhörningens omkrets skall bli så stor som möjligt? (H. T. 1931.)

34. I triangeln ABC är sidan BC konstant och $= a$. Vinklarna variera så, att om $\wedge A$ betecknas med x, så är $\wedge B = 2x$. Visa, att triangelns yta T kan skrivas $T = \frac{a^2}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$, och sök triangelns vinklar, då ytan är så stor som möjligt. (V. T. 1934.)

35. I den likbenta triangeln ABC är $AB = AC = s$. På sidan BC uppritas utåt en kvadrat. Sök maximum för triangelns och kvadratens sammanlagda ytor, då vinkeln A varierar. (Jan. 1937.)

36. En kvadrat $ABCD$ är given; E är AB:s mittpunkt; P är en punkt på BC. Sök maximum eller minimum för vinkeln DPE, när P rör sig från B till C. (H. T. 1937.)

37. Ett parallelltrapets skall inskrivas i en given cirkel. Medelpunktsvinkeln för den ena av de parallella sidorna är 42°. Huru stor skall den motstående sidans medelpunktsvinkel väljas, för att trapetsets yta skall bli maximum? (Jan. 1938.)

38. I en cirkelsektor med radien r och medelpunktsvinkeln $2a$ ($< 180°$) inskrives en rektangel med två hörn på bågen och ett hörn på vardera radien. Bestäm maximivärdet av rektangelns yta. (Aug. 1939.)

39. I en given cirkel med medelpunkten O dragas två radier OA och OB. Hur skola de dragas, för att den i triangeln AOB inskrivna cirkeln skall bli så stor som möjligt. (V. T. 1940.)

40. I en given cirkelsektor, vars medelpunktsvinkel är mindre än 90°, inskrives en rektangel med två hörn på sektorns ena radie. När är rektangelns yta så stor som möjligt? (Aug. 1940.)

---

41. Bestäm höjden i den räta cirkulära cylinder med största möjliga volym, vars hela yta är lika med ytan av en sfär med radien r. (V. T. 1919.)

42. Vilken bland alla räta, cirkulära, stympade koner, som kunna omskrivas kring en given sfär, har den minsta buktiga ytan? (V. T. 1920.)

43. En ellips roterar kring en av sina axlar (med längden $2a$) och alstrar därvid en rotationskropp, sfäroid. Beräkna höjden i den räta cirkulära kon med största möjliga volym, som kan inskrivas i denna sfäroid på det sättet, att dess spets sammanfaller med rotationsaxelns ena ändpunkt. (V. T. 1924.)

44. I en given cirkel med medelpunkten O och radien r skall man bestämma en sektor AOB (med bågen AB mindre än cirkelns halva omkrets) så, att totala ytan av den kropp, som erhålles, då sektorn roterar ett varv kring den med kordan AB parallella diametern, blir så stor som möjligt. Huru stor blir sektorns medelpunktsvinkel och rotationskroppens volym? (V. T. 1932.)

45. I en cirkel med radien R är en viss rätlinig figur inskriven; dess yta är S och dess omkrets l. I en rät cirkulär kon med basradien R och höjden H är ett rakt prisma inskrivet; dess

basytor äro likformiga med den nyss nämnda rätliniga figuren. Huru stor är prismats totala yta, då den är maximum? (Jan. 1936.)

46. I ett klot, vars radie är r, skall göras en utborrning, begränsad av mantelytan till en kon, vars axel går genom klotets medelpunkt, och vars spets når fram till klotytan. Beräkna den koniska ytans toppvinkel så, att *hela* ytan av den kvarstående delen av klotet får största möjliga värde, samt angiv detta. (Aug. 1937.)

47. Sök den största möjliga volymen av en rätvinklig parallellepiped, om medeltalet av kanternas längder är 1 m och medeltalet av sidornas ytor $\frac{3}{4}$ m². (V. T. 1938.)

48. ABC är en likbent triangel, inskriven i en storcirkel på en sfär. Vinkelrätt mot storcirkelplanet läggas plan genom triangelns tre sidor. Dessa plan jämte sfärens yta avgränsa en kropp. Bestäm triangelns vinklar så, att kroppens volym blir så stor som möjligt. (V. T. 1938.)

49. I ett halvklot inlägges en rät cirkulär kon, så att konens topp ligger på periferien av halvklotets plana begränsningsyta och så att periferien av konens bottenyta tangerar halvklotets såväl buktiga som plana begränsningsyta. Sök det största värde, som förhållandet mellan konens mantelyta och halvklotets buktiga yta kan antaga. (Jan. 1939.)

50. I en rät cirkulär kon, vars volym är konstant och lika med volymen av en sfär med radien a, inskrives en halvsfär, så att dess plana begränsningsyta ligger i konens bottenyta. Sök maximum av halvsfärens volym, då konens form varierar. (Jan. 1940.)

51. Av en given sfär utskäres ett sfäriskt segment, vars volym betecknas med v och totala yta med y. Då höjden h i segmentet varierar, ändras både v och y. Man kan då uppfatta v som en funktion av y. Bevisa, att

$$\frac{dv}{dy} = \frac{h}{2}. \qquad \text{(Aug. 1940.)}$$

52. En klotsektors spets och den cirkel, som begränsar dess sfäriska och koniska ytor, ligga på ytan av en given sfär. Sök maximum av sektorns volym. (H. T. 1940.)

---

53. I den oändliga serien

$$1 + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^5 x - \ldots.$$

ha de två första termerna tecknet +, de två följande tecknet —, de därpå två följande tecknet +, o. s. v. För positiva vinklar x mindre än 45° är serien konvergent. Beräkna det största värde, som summan kan få för något dylikt värde på x. (V. T. 1929.)

54. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av femte och sjätte termerna lika med 4. Vilket är det minsta värde, som summan av en sådan oändlig serie kan antaga? (V. T. 1935.)

55. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen $\cos x$ och andra termen $\frac{1}{2}(\sin 2x - 2\cos x)$. Bestäm maxima och minima för seriens summa. (H. T. 1939.)

III. Analytisk geometri.

a. Räta linjen.

56. Bevisa, att om man i ekvationen

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2bx + 2cy = 0.$$

giver åt b och c sådana värden, att ekvationen representerar två räta linjer, så är den ena vinkeln mellan dem i varje fall lika med 60°. (H. T. 1901.)

57. x och y äro rätvinkliga koordinater. Om konstanten a väljes lämpligt, så framställer ekvationen

$$9x^2 - 3xy + ay^2 + 15x - 16y - 14 = 0$$

två räta linjer. Bestäm detta värde på a samt de båda linjernas ekvationer. (V. T. 1931.)

58. Skärningspunkten mellan linjerna $x + 2y - 4 = 0$ och $x - y - 1 = 0$ betecknas med A, skärningspunkterna mellan dessa linjer och x-axeln med B, resp. C. Man skall bestämma ekvationerna för de linjer l, som gå genom A så, att de vinkelräta avstånden till en linje l från B och C förhålla sig som 1 : 2. (H. T. 1934.)

59. Ekvationerna för en fyrhörnings sidor äro i ordning $y + 3 = 0$; $x - 2 = 0$; $x + 2y - 12 = 0$; $2x - y - 19 = 0$. Sök de vinkelräta avstånden till den diagonal, som går genom skärningspunkten mellan de två sistnämnda sidorna från de båda hörn, som icke ligga på densamma. (V. T. 1935.)

60. Bestäm koordinaterna för en av de punkter på den räta linjen $x - 2y = 0$, vars avstånd till den räta linjen $3x + 4y +$

$+5=0$ är lika stort som dess avstånd till punkten $(8; -1)$. (H. T. 1935.)

61. I ett rätvinkligt koordinatsystem är O origo, A en punkt på x-axeln och B en punkt på y-axeln. En rät linje genom A träffar OB i en punkt C mellan O och B så, att $OC : CB = 2 : 3$. En rät linje genom B träffar OA i en punkt D mellan O och A så, att $OD : DA = 3 : 2$. Linjerna AC och BD skära varandra i E. Från O är en linje dragen genom E; den träffar AB i F. Bestäm förhållandet $AF : FB$. (Uppgiften kan lösas antingen med analytisk eller med euklideisk geometri.) (H. T. 1935.)

62. Sök vinkeln mellan de räta linjer, som gå genom punkten $(3; -3)$ på avståndet 2 från origo. (Jan. 1936.)

63. Bestäm värdet på m så, att den parallellogram, som bildas av linjerna

$$4x - 7y = m;\ 4x - 7y = 16;\ x + 8y = 10;\ x + 8y = 6,$$

får mot varandra vinkelräta diagonaler. (H. T. 1936.)

64. Ekvationerna för en triangels sidor äro

$$x - 2y = -9;\ 4x + 2y = 9;\ 11x - 2y = 141.$$

Sök radien i den inskrivna cirkeln. (Jan. 1937.)

65. Ekvationerna för en fyrhörnings sidor äro i ordning $x - 8y + 16 = 0$, $7x + 4y - 18 = 0$, $32x - 4y - 73 = 0$ och $16x + 28y + 61 = 0$. Bevisa, att en cirkel kan omskrivas kring fyrhörningen och att en cirkel kan inskrivas i densamma. (Aug. 1940.)

66. Genom punkten $(10; 2)$ drages en rät linje, så att punkterna $(2; 3)$ och $(9; 4)$ komma att ligga på samma avstånd från densamma. Sök linjens ekvation. (H. T. 1940.)

---

67. Koordinaterna för en triangels hörn äro $(1; 3)$, $(-1; 1)$ och $(2; 1)$. Bestäm koordinaterna för en punkt på räta linjen $x + y = 0$, så belägen att summan av kvadraterna på dess avstånd till triangelns sidor (eller deras förlängningar) blir så liten som möjligt. Angiv även minimivärdet. (V. T. 1936.)

---

b. Kurvor i allmänhet.

68. Konstruera grafiskt eller på annat sätt kurvan

$$xy + y^2 = x. \qquad \text{(V. T. 1909.)}$$

69. Studera grafiskt funktionen $y = \dfrac{x(x-3)}{x-4}$. (H. T. 1910.)

70. Sök maxima och minima hos funktionen $y = \dfrac{x-2}{x^2-1}$ och angiv utseendet hos motsvarande kurva. (H. T. 1915.)

71. Undersök kurvan $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$ med avseende på maxima, minima och asymtoter, samt konstruera kurvan. (V. T. 1918.)

72. Undersök kurvan $y = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$ med avseende på maxima, minima och asymtoter samt angiv kurvans utseende. (H. T. 1918.)

73. Upprita kurvan $y = \dfrac{x^2+10x-5}{x^2}$. (H. T. 1920.)

74. Konstruera kurvan $y = x + \dfrac{25x}{x^2+2}$. (H. T. 1926.)

---

75. Bestäm asymtoterna samt maximi- och minimipunkterna till kurvan $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$ och upprita kurvan i dess huvuddrag. (Jan. 1939.)

---

76. Konstruera i huvuddrag kurvan $y = x\sqrt[4]{9-x^2}$ och angiv särskilt, dels de punkter, som ligga på x-axeln, och ekvationerna för tangenterna i dessa punkter, dels kurvans maximi- och minimipunkter. (V. T. 1937.)

77. Konstruera kurvan $y = x + \sqrt{1-x^2}$. Angiv speciellt eventuella maxima och minima. (V. T. 1940.)

---

78. Diskutera utseendet av kurvan $4x^2 + 16xy + y^2 - 40x - 20y + 100 = 0$ med angivande av eventuella maxima och minima. (H. T. 1940.)

---

79. Genom en punkt P på kurvan $y = x + 4x^4$ lägges en normal till kurvan och en linje parallell med x-axeln. Dessa två linjer jämte y-axeln bilda en rätvinklig triangel. Var på positiva sidan om y-axeln (d. v. s. där $x > 0$) skall punkten P ligga, för att triangelns yta skall bli så stor som möjligt? Hur stor blir i så fall triangelns yta? (V. T. 1913.)

80. O är toppen i en given rät cirkulär kon; M är medelpunkten i dess bottencirkel. Höjden OM, som har längden 2, förlänges åt M till ett stycke $MP = x$. En annan rät cirkulär kon har punkten P till topp och PO till höjd. Dess bottenradie är så avpassad, att periferien till den första konens bottencirkel ligger på den andra konens mantelyta. Man vill studera förhållandet mellan den andra konens volym och den första konens volym för olika lägen av punkten P. Detta förhållande blir en viss funktion av x, som betecknas med $f(x)$. Konstruera kurvan $y = f(x)$ med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter samt asymtoter. (H. T. 1927.)

81. I likheten $y = \dfrac{27(x+a)}{x^3+b}$ skola konstanterna a och b bestämmas så, att följande villkor uppfyllas. Sammanlagda antalet maximi- och minimivärden hos funktionen y är 3. Ett av dessa svarar mot $x = 1$. De båda andra svara mot x-värden, vilkas produkt är $4\frac{1}{2}$. Konstruera med de mot dessa villkor svarande värdena på a och b den kurva, som representerar funktionen, och angiv speciellt maximi- och minimipunkter samt asymtoter. (H. T. 1928.)

82. Genom en punkt P på kurvan $y = x^3 - x^2 + x$ dragas kurvans normal och en med x-axeln parallell linje. Dessa båda linjer bilda tillsammans med y-axeln en triangel. Undersök om dennas yta får något maximi- eller minimivärde, då P beskriver kurvan, samt beräkna triangelytan, då punkten P avlägsnar sig obegränsat på kurvan. (H. T. 1933.)

83. Beräkna vinklarna i den triangel, som begränsas av asymtoterna till kurvan $y = \dfrac{x^2-2}{2x+1}$ samt tangenten i dennas skärningspunkt med y-axeln. (Aug. 1937.)

84. Huru stor är ytan av den triangel, som bildas av y-axeln samt av tangenten och normalen i en av inflexionspunkterna till kurvan $12y = x^4 - 6x^2 + 12$? (Jan. 1938.)

85. Bestäm a och b, så att kurvan

$$y = \frac{ax^3 + bx}{x^2 - 1}$$

får $y = 2x$ som asymtot samt får en minimipunkt, vars abskissa är 2. Upprita sedan kurvan. (V. T. 1938.)

86. Från punkten B (1; 0) i ett rätvinkligt koordinatsystem drages en rörlig rät linje, som i punkten A skär linjen $y = x$. I A drages en normal mot BA, och denna normal skär x-axeln i P. Vilka delar av x-axeln genomlöper P, då BA vrider sig ett varv kring B? (Aug. 1938.)

87. A är en rörlig punkt på kurvan $y = \dfrac{1}{x^2-1}$. Kurvtangenten i A råkar kurvan även i en punkt B. Från A och B dragas räta linjer vinkelrätt mot x-axeln, som de råka i punkterna C och D resp. Bestäm koordinaterna för punkten A, då sträckan CD är så liten som möjligt. (H. T. 1938.)

88. Kurvan

$$y = \frac{x^3 + a}{x^2 + b},$$

där a och b äro konstanter, går genom punkterna $(1; -\frac{1}{3})$ och $(3; 5\frac{2}{5})$. Sök ytan av den parallellogram, vilken har som hörn kurvans maximi- och minimipunkter samt de punkter, där asymtoterna skära varandra. (V. T. 1939.)

89. Bestäm konstanten a så, att inflexionspunkten på kurvan

$$y = \frac{2x^2 + a}{(x+1)^2}$$

får abskissan $= 2$. Upprita kurvan och angiv den punkt på densamma, i vilken tangenten är parallell med tangenten i kurvans inflexionspunkt. (Aug. 1939.)

90. Genom en punkt på kurvan $y = \dfrac{3x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ dragas två linjer, en parallell med x-axeln och en vinkelrät mot kurvans asymtot. Bestäm punktens koordinater, då ytan av den triangel, som bildas av asymtoten och de båda nämnda linjerna, blir så stor som möjligt. (H. T. 1939.)

91. Man betraktar en hel rationell tredjegradsfunktion av x jämte tillhörande kurva. Bevisa, att kurvans inflexionspunkt är mittpunkt på sammanbindningslinjen mellan maximi- och minimipunkterna, där sådana finnas. (H. T. 1939.)

92. Bestäm konstanterna a och b i funktionen

$$y = \frac{a\,x^3}{x^2 + b},$$

så att motsvarande kurva får en inflexionspunkt för $x = 3$ och linjen $y = 2x$ blir asymtot. Konstruera kurvan i dess huvuddrag. (Aug. 1940.)

93. Kurvan $y = f(x)$, där $f(x)$ är en hel rationell funktion av tredje graden, tangerar linjen $x - y = 0$ i origo samt har ett maximum för $x = 1$ och en inflexionspunkt för $x = -\frac{1}{2}$. Bestäm $f(x)$ och konstruera kurvan. (Jan. 1941.)

94. Skillnaden mellan abskissorna för två punkter A och B på kurvan $2y = x^2 - 4x + 6$ är en längdenhet. A och B sammanbindas med origo O. Studera, hur ytan av triangeln OAB varierar, då punkterna A och B genomlöpa kurvan, och åskådliggör detta grafiskt. (Jan. 1941.)

95. En triangel bildas av asymtoterna till kurvan

$$y = \frac{3(x^2 + 1)}{2x}$$

och tangenterna till kurvan i den punkt, som har abskissan $\frac{5}{6}$. Beräkna den största vinkeln i denna triangel. (V. T. 1941.)

---

c. Cirkeln.

96. Sök ekvationen för en cirkel, som har radien $= 5$, går genom origo och har sin medelpunkt belägen på räta linjen $x + 2y = 5$. (V. T. 1920.)

97. En cirkel har sin medelpunkt på linjen $x + y = 2$ och tangerar linjerna $x - 2y = 0$ och $x - 2y = 10$. Sök cirkelns ekvation. (Aug. 1935.)

98. En cirkels ekvation är $5x^2 + 5y^2 = 68$. Bestäm skärningspunkten mellan tangenterna till cirkeln i de punkter, där cirkeln skäres av linjen $y = 2x + 2$. (H. T. 1936.)

99. Bestäm ekvationerna för de cirklar, som gå genom punkten $(-1; 8)$ och tangera de båda koordinataxlarna. (Jan. 1938.)

100. AOB är en triangel med hörnet O i origo. Ekvationen för sidan AB är $x - 2y + 16 = 0$ och för den från A dragna medianen $x - y + 6 = 0$. Angiv ekvationen för den kring triangeln omskrivna cirkeln. (Aug. 1939.)

---

d. Ellipsen.

101. Visa, att det segment, som ur en godtycklig tangent till en ellips utskäres av vertextangenterna, från en brännpunkt synes under rät vinkel. (V. T. 1922.)

102. I en ellips är den triangel liksidig, vars hörn äro belägna i medelpunkten och parameterns ändpunkter. Huru stor är excentriciteten? (H. T. 1922.)

103. Kring ellipsen $3x^2 + 2y^2 = 6$ är en rektangel omskriven, vilken har en sida parallell med den räta linjen $2x - 3y = 0$. Bestäm förhållandet mellan rektangelns större och mindre sida. (H. T. 1923.)

104. I en ellips är halva storaxeln $= 4$. Tangenterna till densamma från en punkt på den mindre axelns förlängning med vståndet 5 från medelpunkten äro sinsemellan vinkelräta. Bestäm ellipsens ekvation. (H. T. 1924.)

105. För en viss punkt på en ellips' periferi äro dess avstånd från ellipsens medelpunkt och båda brännpunkter (m, r_1 och r_2) bekanta. Beräkna härur ellipsens excentricitet. (H. T. 1925.)

106. Kring ellipsen $16x^2 + y^2 = 16$ omskrives en liksidig triangel, vars ena sida är parallell med ellipsens längsta axel. Beräkna triangelsidans längd. (V. T. 1926.)

107. M är medelpunkten i ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a > b)$. P är en godtycklig punkt på ellipsen. Ellipsnormalen i P råkar ellipsens storaxel i en punkt A. Med MA som diameter konstrueras en cirkel. Beräkna längderna av de tangenter, som från P kunna dragas till denna cirkel. (H. T. 1926.)

108. I ett parallelltrapets äro de båda icke parallella sidorna lika långa. Den ena av de parallella sidorna är dubbelt så stor som den andra och höjden lika med den större av dessa sidor. En ellips har sin ena axel parallell med de båda parallella sidorna och tangerar dessa i deras mittpunkter. Den tangerar dessutom de båda icke parallella sidorna. Bestäm ellipsens excentricitet och det förhållande, i vilket beröringspunkten delar en av de icke parallella sidorna i trapetset. (V. T. 1927.)

109. Kring en ellips omskrives en kvadrat på så sätt, att en av kvadratens diagonaler faller utefter ellipsens storaxel. Var och en av kvadratens sidor delas av tangeringspunkten i tvenne delar, som förhålla sig som $1 : 2$. Hur stor är ellipsens excentricitet? (H. T. 1928.)

110. Visa, att de båda tangenterna till ellipsen $2x^2 + 6y^2 = 3$, som gå genom punkten $(1; 1)$, äro vinkelräta mot varandra. (H. T. 1929.)

111. Bevisa, att medelproportionalen till de båda från en ellips' brännpunkter mot en godtycklig tangent till ellipsen dragna normalerna är lika med ellipsens mindre halvaxel. (V. T. 1930.)

112. Från punkten $(0; a)$ dragas tangenter till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. De med dessa tangenter parallella diametrarna i ellipsen äro konjugatdiametrar. Beräkna ellipsens excentricitet. (V. T. 1932.)

113. I en av de punkter, där kurvorna
$$x^2 + y^2 + 4x = 9 \text{ och } 2x^2 + 3y^2 = 14$$
skära varandra, dragas tangenterna till kurvorna. Dessa båda tangenter bilda tillsammans med x-axeln en triangel. Beräkna triangelns yta. (V. T. 1933.)

114. I en viss ellips är en kvadrat inskriven. Omkring ellipsen är omskriven en fyrhörning, vars sidor tangera ellipsen i kvadratens hörn och vars yta är fyra gånger så stor som kvadratens. Hur stor är ellipsens excentricitet? (V. T. 1936.)

115. En ellips och en cirkel ha samma medelpunkt. Cirkellinjen går genom ellipsens brännpunkter. Brännpunktsradierna från en av de punkter, i vilka de båda kurvorna skära varandra, förhålla sig som $3:4$. Beräkna vinklarna i den fyrhörning, som bildas av de gemensamma tangenterna till ellipsen och cirkeln. (Aug. 1936.)

116. P är ena ändpunkten av en parameter i ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a > b)$. Tangenten i P skär x-axeln i A och y-axeln i B. Ellipsens excentricitet är sådan, att $PB = a$. Bevisa, att $PA = b$. (Jan. 1937.)

117. I en punkt P på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ drages en diameter. Därjämte drages motsvarande konjugatdiameter, vilken råkar kurvan i en punkt Q. Tangenten i P skär abskissaxeln i punkten A, och tangenten i Q skär ordinataxeln i punkten B. O är ellipsens centrum. Visa, att $\triangle\, AOP = \triangle\, BOQ$. (V. T. 1937.)

118. I en ellips är A ena ändpunkten av storaxeln och PP_1 parametern i den motsatta ellipshalvan. Tangenterna i A och P skära varandra i B. Huru stor är ellipsens excentricitet, om linjen BP_1 är bisektris till vinkeln mellan tangenterna? (V. T. 1938.)

119. Till en ellips är given en parameterkorda till längd och läge. Dessutom är riktningen av ellipsnormalen genom samma parameterkordas ena ändpunkt känd. Konstruera geometriskt till längd och läge ellipsens axlar. (Aug. 1938.)

120. P är en punkt på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, där $a > b$. O är origo, A är punkten $(a;\, 0)$ och Q är den punkt på cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$, som har samma abskissa som P. Visa, att $OP = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2\alpha}$, där α är vinkeln AOQ och $2c$ är brännpunktsavståndet. (Jan. 1939.)

121. En parallellogram har en sidas ändpunkter i centrum och lillaxelns ena ändpunkt på en ellips, de två övriga hörnen på ellipsens periferi, varjämte parallellogrammens ena diagonal går genom en av ellipsens brännpunkter. Huru stor är ellipsens excentricitet? (V. T. 1939.)

122. I en ellips drages en korda, som går genom lillaxelns ena ändpunkt och den ena brännpunkten. Tangenterna till ellipsen genom kordans ändpunkter dragas. Visa, att linjen, som förenar dessa tangenters skärningspunkt med samma brännpunkt, går vinkelrätt mot kordan. (Aug. 1939.)

123. Kring en ellips är en rektangel omskriven med sidorna parallella med ellipsens axlar. Från en punkt på ellipsen fällas normalerna mot rektangelns diagonaler. Visa, att summan av kvadraterna på dessa normaler är lika stor, varhelst på ellipsen punkten än tages. Hur stor är ellipsens excentricitet, om denna konstanta kvadratsumma är lika med $\frac{1}{5}$ av rektangelns yta? (H. T. 1939.)

124. Från den ena ändpunkten av en parameter i en ellips drages diametern. Dennas konjugatdiameter delar parametern i förhållandet $7:8$. Beräkna ellipsens excentricitet. (V. T. 1940.)

125. AB är en fix korda i en ellips, C är en rörlig punkt på ellipsens omkrets. Av de trianglar ABC, som ligga på ena sidan om AB, har ABC_1 den största ytan, och av dem, som ligga på andra sidan, är ABC_2 den största. Bevisa, att linjen C_1C_2 är diameter i ellipsen och delar AB mitt itu. (H. T. 1940.)

126. Från punkten P $(7;\, \frac{9}{7})$ äro tangenterna dragna till ellipsen $9\,x^2 + 25\,y^2 = 225$. Tangeringspunkterna äro A och B; O är ellipsens medelpunkt. Visa, att fyrhörningen $PAOB$ är en parallellogram. (V. T. 1941.)

---

127. Normalen i en punkt P på periferien till en ellips med excentriciteten $\frac{1}{2}$ bildar med ellipsens storaxel den spetsiga vinkeln v. Vilket värde skall v ha, för att vinkeln mellan normalen och medelpunktsradien genom P skall bli den största möjliga, och hur stor blir i så fall sistnämnda vinkel? (H. T. 1914.)

128. Bestäm ekvationerna för de normaler till ellipsen $x^2 + 4y^2 = 16$, vilka ligga på största möjliga avstånd från ellipsens medelpunkt. (V. T. 1916.)

129. Vilken bör excentriciteten vara i en ellips, om den minsta spetsiga vinkel, som är möjlig för en i densamma inskriven parallellogram, är $30°$? (V. T. 1919.)

130. Vilken är den största vinkel, som två konjugatdiametrar till ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 144$ bilda med varandra? (H. T. 1923.)

131. I triangeln AOB är vinkeln O rät. En ellips har medelpunkten i O, dess axlar falla utefter OA och OB. Ellipsen tangerar AB i en punkt P. För vilket läge av P på AB blir ellipsens yta så stor som möjligt? (V. T. 1926.)

132. Omkring en likbent rätvinklig triangel är en ellips omskriven på det sätt, att ellipsens storaxel är parallell med triangelns hypotenusa. I vilket förhållande stå ellipsens axlar till varandra, om ellipsens yta är den minsta möjliga? (V. T. 1927.)

133. Tangenten i en punkt P på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ råkar koordinataxlarna i punkterna A och B. O är ellipsens medelpunkt. Vid rotation kring x-axeln alstrar triangeln AOB en kon, vars volym varierar med punkten P:s läge. Vilket är det minsta värde denna volym kan uppnå? (H. T. 1931.)

134. En ellips med halvaxlarna a och b är given. På vilket avstånd från ellipsens medelpunkt skall en med den mindre axeln parallell korda dragas, för att summan av kordans längd och dess avstånd från medelpunkten skall bliva den största möjliga? (Aug. 1935.)

135. Giv ekvationen för den ellips, som tangerar y-axeln och linjen $\frac{x}{h} + \frac{y}{l} = 1$, $(h > 0)$, har ena axeln utefter positiva x-axeln och omsluter största möjliga yta. (V. T. 1939.)

136. AB är storaxeln i en ellips, F är ena brännpunkten. En rörlig tangent till ellipsen skär de genom A och B dragna tangenterna i punkterna C och D respektive. Beräkna det minsta värde, som ytan av triangeln CDF kan antaga. (H. T. 1939.)

137. Tangenter dragas till en ellips i parametrarnas ändpunkter. Om parameterns längd är konstant, hur stor är ellipsens excentricitet, då den av de nämnda tangenterna bildade fyrhörningen har minsta möjliga yta? (Jan. 1940.)

138. Två fyrhörningar äro inskrivna i en ellips. Den enas hörn äro belägna i parametrarnas, den andras i axlarnas ändpunkter. Bestäm excentriciteten hos den ellips, i vilken förhållandet mellan ytorna av dessa fyrhörningar, tagna i nyss nämnd ordning, är så stort som möjligt. (Jan. 1941.)

---

e. Hyperbeln.

139. Man bildar en triangel, som har sina hörn i de båda vertices till hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ samt i en godtycklig punkt på kurvan. Visa, att höjdernas skärningspunkt ligger på hyperbeln. (H. T. 1912.)

140. En hyperbel, som har sina brännpunkter på x-axeln och träffar denna axel i punkterna $x = +1$ och $x = -1$, skär ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$ under räta vinklar. Härled hyperbelns ekvation och dess skärningspunkter med ellipsen. (H. T. 1913.)

141. Bevisa, att normalen från fokus mot asymtoten i en hyperbel är lika med halva konjugataxeln. (H. T. 1915.)

142. En parallellogram har ett hörn i en punkt på hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och två av sina sidor utefter asymtoterna. Visa, att dess yta är konstant. (V. T. 1920.)

143. En liksidig hyperbel, vars axel är $2a$, och en cirkel ha gemensam medelpunkt. I de punkter, där de båda kurvorna skära varandra, bilda deras respektive tangenter 45 graders vinkel med varandra. Hur stor är cirkelns radie? (V. T. 1922.)

144. Bestäm ekvationen för den diameter till hyperbeln $5x^2 - 2y^2 = -3$, som delar kordor, parallella med linjen $3x + 2y = 0$, mitt itu. (V. T. 1925.)

145. Genom ena brännpunkten i en hyperbel drages en rät linje vinkelrätt mot transversalaxeln. Den råkar hyperbeln i tvenne punkter P och Q. Hur stor är hyperbelns excentricitet, om normalen till hyperbeln i P är parallell med den linje, som förenar Q med den andra brännpunkten? (V. T. 1927.)

146. Bestäm vinkelkoefficienterna för de kordor i hyperbeln $2x^2 - 3y^2 = 1$, vilka hava den egenskapen, att kordan bildar en vinkel av 45° med den diameter, som delar kordan mitt itu. (V. T. 1930.)

147. Hur stor är excentriciteten hos en hyperbel, om en triangel med vinklarna 90°, 60°, 30° har den räta vinkelns spets i en punkt på kurvan och de båda andra spetsarna i brännpunkterna? (V. T. 1931.)

148. P_1 och P_2 äro två punkter på en hyperbel. Normalerna till kurvan i dessa punkter råka kurvans transversalaxel i punkterna A_1 och A_2. Visa, att mittpunktsnormalen till sträckan P_1P_2 går genom mittpunkten av sträckan A_1A_2. (H. T. 1932.)

149. I ändpunkterna av parametern till en hyperbel äro tangenterna dragna. De skära en av asymtoterna i punkterna A och B. Visa, att mittpunkten av sträckan AB ligger i parameterns förlängning. (Jan. 1936.)

150. Från en godtycklig punkt Q på transversalaxeln till en hyperbel drages en tangent till kurvan. Tangeringspunkten P sammanbindes med transversalaxelns ändpunkter A och A_1, och sammanbindningslinjerna utdragas. Genom Q drages en linje parallellt med konjugataxeln till hyperbeln, och den skär

PA i B och PA_1 i C. Visa, att transversalaxeln delar BC mitt itu. (Maj 1936.)

151. En hyperbel har brännpunkterna i (5; 0) och (— 5; 0) samt tangerar linjen $2x + 3y + 3 = 0$. Bestäm hyperbelns ekvation och tangeringspunktens koordinater. (Aug. 1937.)

152. Brännpunkterna i hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$ äro F och F_1. En korda genom F förbinder punkterna P och Q, belägna på samma hyperbelgren. Längden av PF_1 är $4a$. Beräkna vinklarna i triangeln PQF_1. (H. T. 1937.)

153. En hyperbels axlar äro parallella med koordinataxlarna. Ekvationerna för en asymtot, en diameter och en tangent äro resp. $x - 2y + 8 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ och $3x - 2y = 0$. Härled hyperbelns ekvation. (H. T. 1937.)

154. Excentriciteten i en ellips är $\frac{1}{2}$. En hyperbel har sina toppunkter i ellipsens brännpunkter och sina brännpunkter i storaxelns ändpunkter. Under vilken vinkel skära kurvorna varandra? (Jan. 1938.)

155. En ellips och en hyperbel ha samma brännpunkter. Ellipsens parameter är dubbelt så stor som hyperbelns. Vardera hyperbelgrenens topp (vertex) ligger mitt emellan kurvornas gemensamma centrum och resp. ändpunkt av ellipsens storaxel. Beräkna vardera kurvans excentricitet. (Aug. 1938.)

156. En ellips och en liksidig hyperbel ha gemensamma brännpunkter. Bevisa, att de sträckor, som hyperbeln avgränsar på var och en av två mot varandra vinkelräta ellipstangenter, äro lika långa. (Aug. 1938.)

157. En ellips och en hyperbel ha gemensam medelpunkt. Den förras storaxel och den senares transversalaxel ligga utefter abskissaxeln. En rät linje L med riktningsvinkeln 30° går genom kurvornas medelpunkt. D_1 och D_2 äro de till L konjugerade diametrarna i ellipsen resp. hyperbeln. Den vinkel mellan D_1 och D_2, i vars fält hyperbelns konjugataxel är belägen, är 60°. Hur stor är hyperbelns excentricitet, om ellipsens är $\frac{2}{3}$? (H. T. 1938.)

158. I en hyperbel med medelpunkten O drages en korda genom ena brännpunkten F samt den diameter, som delar kordan mitt itu. Vinkeln mellan dessa båda linjer är 45°. Ytan av den triangel, som begränsas av dessa linjer och OF, är lika med kvadraten på halva transversalaxeln. Beräkna hyperbelns excentricitet. (Jan. 1939.)

159. P är en rörlig punkt på en hyperbel. Med P som medelpunkt uppritas en cirkel, som tangerar hyperbelns konjugataxel och skär transversalaxeln i två punkter A och B. Visa, att om sträckan AB är konstant, så är hyperbeln liksidig. (V. T. 1939.)

160. Bestäm ekvationen för den hyperbel, vars asymtoter representeras av ekvationen $9x^2 - 16y^2 = 0$ och som går genom punkten (4; 1). (Aug. 1939.)

161. Genom ena brännpunkten i en hyperbel drages en linje parallellt med en av asymtoterna. Tangenten i skärningspunkten mellan denna linje och hyperbeln delar avståndet mellan brännpunkterna i förhållandet 7 : 3. Beräkna vinkeln mellan asymtoterna. (H. T. 1939.)

162. I ett koordinatsystem är O origo och P en godtycklig punkt på hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$. Bevisa, att den triangel, som bildas av hyperbelns tangent och normal i P samt x-axeln, har lika stor yta som den, vars sidor utgöras av sträckan PO, normalen mot denna genom P samt x-axeln. (Jan. 1940.)

163. Två konjugathyperbler och en med dem koncentrisk cirkel äro uppritade. Var och en av de cirkelbågar, som den ena hyperbeln avskär på cirkeln, har en medelpunktsvinkel av 90°. Motsvarande medelpunktsvinklar för den andra hyperbeln äro 60° och 120°. Bestäm vinkeln mellan hyperblernas asymtoter. (V. T. 1940.)

164. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av x-axeln och asymtoterna till hyperbeln $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$. (Aug. 1940.)

165. Hyperblerna $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och $xy = k^2$ skära varandra under räta vinklar. Hur stor vinkel bilda den förra hyperbelns asymtoter med varandra? (H. T. 1940.)

166. I tvenne konjugathyperbler synas parametrarna från medelpunkten under vinklarna 2α och 2β. Bevisa, att $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = e_1 + e_2$, där e_1 och e_2 äro hyperblernas excentriciteter. (Jan. 1941.)

167. En rät linje går genom ena ändpunkten av en hyperbels transversalaxel och bildar 45° vinkel med denna. Hyperbelns asymtoter avskära av linjen ett stycke, som är dubbelt så stort som den av hyperbeln avskurna kordan. Beräkna hyperbelns excentricitet. (V. T. 1941.)

---

168. Genom en punkt P på en liksidig hyperbel drages tangenten, och på denna avsättes från P i båda riktningarna sträckor

PA och *PB*, lika med avståndet mellan *P* och den bortre brännpunkten *C*. För vilket läge på *P* blir ytan av triangeln *ABC* den minsta möjliga? (Aug. 1936.)

---

f. Parabeln.

169. r_1 och r_2 äro två i rät linje liggande brännpunktsradier till en parabel. Visa, att

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{a},$$

om a betecknar avståndet mellan parabelns brännpunkt och dess topp. (V. T. 1926.)

170. På parabeln $x^2 = 4ay$ har man tagit tre punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2), och (x_3, y_3) så belägna, att $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Bevisa, att normalerna till parabeln i dessa punkter råka varandra i en och samma punkt. (V. T. 1928.)

171. På axeln till parabeln $y^2 = 2px$ väljes punkten *P* så, att de båda tangenterna från *P* till parabeln bilda 60° vinkel med varandra. Bestäm ekvationen för den cirkel, som går genom *P* och de båda tangeringspunkterna för de nämnda tangenterna. (V. T. 1929.)

172. Brännpunkten till en parabel $y^2 = 2px$ sammanfaller med ena brännpunkten till en ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Vinkeln mellan kurvornas båda gemensamma tangenter är 60°. Beräkna ellipsens excentricitet. (H. T. 1930.)

173. På parabeln

$$y^2 = 8x,$$

vars brännpunkt betecknas med *F*, har man tagit punkten *P* så, att brännpunktsradien *PF* är 6 längdenheter. Genom *F* drages linjen *l* så, att det stycke av *l*, som ligger inom parabeln, delas mitt itu av den genom *P* gående diametern i parabeln. Sök vinkeln mellan *l* och *PF*. (H. T. 1931.)

174. En triangel bildas av *y*-axeln och två tangenter till parabeln $y^2 = 2px$. Visa, att denna triangels höjdlinjer träffas på parabelns styrlinje. (V. T. 1932.)

175. *F* är brännpunkt till en parabel, som tangerar räta linjen *t* i *P*. Konstruera (med passare och linjal) den punkt på parabeln, i vilken kurvans normal är parallell med *t*, då endast punkterna *F* och *P* samt den räta linjen *t* äro givna. (H. T. 1932.)

176. Bestäm medelpunkten i en cirkel med given radie *R*, då cirkeln i två punkter tangerar en given parabel $y^2 = 2px$. (V. T. 1933.)

177. En liksidig triangel har ett hörn i brännpunkten till parabeln $y^2 = 2px$. Den motstående sidan är en mot parabelns axel vinkelrät korda i parabeln, belägen längre bort från vertex. Hur stor är triangelns yta? (H. T. 1933.)

178. Hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och parabeln $y^2 = 2px$ skära varandra i punkterna *E* och *G*, och kordan *EG* går genom *F*, som är gemensam brännpunkt till de båda kurvorna. Sök hyperbelns excentricitet. (V. T. 1934.)

179. En rätvinklig triangel är inskriven i en parabel så, att den räta vinkelns spets faller i parabelns topp. Visa att hypotenusan alltid skär parabelns axel i samma punkt. (Aug. 1935.)

180. En parabel är given; dess brännpunkt är *F*. Tangenterna i parameterns ändpunkter äro dragna. En godtycklig tredje tangent till parabeln skär de båda andra i punkterna P_1 och P_2. Visa, att linjerna FP_1 och FP_2 äro vinkelräta mot varandra. (H. T. 1935.)

181. Parablerna $y^2 = 4ax - b$ och $y^2 = -4bx + a$ hava gemensam brännpunkt. Avståndet mellan deras vertices är $= \frac{6}{5}$. Bestäm a och b under förutsättning, att båda äro positiva tal. (Maj 1936.)

182. En parabels normaler i punkterna P_1 och P_2 råka axeln i Q_1 och Q_2 resp. Man uppritar cirkeln C_1, som har radien Q_1P_1 och centrum i Q_1, samt cirkeln C_2 med radien Q_2P_2 och centrum i Q_2. Visa, att tangenten till C_2 från P_1 har samma längd som tangenten till C_1 från P_2. (H. T. 1936.)

183. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna punkterna *A* (—4; 0), *B* (3; 0), *C* (6; 8). På *AC* mellan *A* och *C* tages punkten *P* så, att $AP : PC = 1 : 3$. På *CB*:s förlängning tages punkten *Q* så, att $QB : QC = 1 : 3$. En parabel har sin axel parallell med *x*-axeln och går genom punkterna *C*, *P*, *Q*. Bestäm parabelns ekvation. (V. T. 1937.)

184. *AB* är en mot axeln vinkelrät korda i en parabel samt *CD* en annan korda, parallell med parabeltangenten i *B*. Visa, att kordorna *AC* och *AD* bilda lika stora vinklar med *AB*. (Aug. 1937.)

185. Till en parabel äro dragna två fasta tangenter, som i *A* och *B* skäras av en tredje rörlig tangent. Visa, att stycket *AB* synes under konstant vinkel från parabelns brännpunkt *F*. (H. T. 1937.)

186. En parabels ekvation är $y^2 = 2px$. Från parameterns ändpunkter, A och B, dragas normaler, AC och BD, mot en godtycklig tangent. Visa, att ytan av fyrhörningen $ABDC$ är konstant. (V. T. 1938.)

187. I skärningspunkterna mellan den räta linjen $x + y = 3$ och parabeln $y^2 = 4x$ dragas tangenterna till parabeln. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av dessa tangenter och den räta linjen. (H. T. 1938.)

188. Abskissorna för punkterna P_1 och P_2, belägna på parabeln $y = 2x^2$, äro x_1 resp. x_2. Vilket samband måste äga rum mellan x_1 och x_2, för att räta linjen P_1P_2 skall vara tangent till parabeln $y^2 = 2x$? (H. T. 1938.)

189. En parabels ekvation är $y^2 = 2px$. En annan parabel har samma brännpunkt och samma parameter men axeln riktad åt motsatt håll. Origo och parablernas ena skärningspunkt sammanbindas. Mot denna kordariktning svarar en diameter till vardera parabeln. Sök avståndet mellan dessa båda diametrar. (Jan. 1939.)

190. Bestäm ekvationerna för de två parabler, vilkas axlar sammanfalla med x-axeln och vilka i punkten (2; 1) bilda en vinkel av 45° med ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 11$. (V. T. 1939.)

191. En parabel, som är öppen åt den positiva x-axelns håll, har vertex i den ena brännpunkten till ellipsen $4x^2 + 5y^2 + 16x - 4 = 0$; parabelns brännpunkt sammanfaller med ellipsens andra brännpunkt. Sök ekvationerna för kurvornas gemensamma tangenter. (Aug. 1939.)

192. En liksidig triangels sida är 4 längdenheter. En parabel tangerar förlängningarna av två sidor i triangeln, har sin brännpunkt på den tredje sidan och sin axel vinkelrät mot denna sida. Hur stor är parabelns parameter? (H. T. 1939.)

193. Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ och parabeln $y^2 = 2\,px$ ha lika stora parametrar. Tangenterna till kurvorna i en av deras skärningspunkter avskära på y-axeln en sträcka $= r$, normalerna i samma punkt på motsvarande sätt en sträcka $= s$. Den gemensamma kordans avstånd från hyperbelns vertices äro t och u. Bevisa, att $rs = tu$. (Jan. 1940.)

194. Punkten A är belägen på axeln till parabeln $y^2 = 2\,px$. En ljusstråle utgår från A vinkelrätt mot axeln och reflekteras mot parabeln. Den reflekterade strålen eller dess förlängning råkar axeln i en punkt B, som ligger på avståndet $4\,p$ från A. Bestäm de punkter A, som uppfylla dessa villkor. (V. T. 1940.)

195. En korda i parabeln $y^2 = 4x$ går genom punkten (5; 2) och halveras i denna punkt. Bestäm koordinaterna för kordans ändpunkter. (Aug. 1940.)

196. Axeln i en parabel och storaxeln i en ellips ligga utefter samma räta linje. Parabeln går genom ellipsens ena vertex samt genom båda ändpunkterna av dess ena parameter. Parabelns parameter förhåller sig till ellipsens som 5 : 6. Bestäm ellipsens excentricitet. (H. T. 1940.)

197. Abskissorna för punkterna A och B på parabeln $2py = x^2$ äro a och b, där $a > b$. Diametern till kordan AB skär parabeln i punkten C. Bevisa, att ytan av triangeln ABC är

$$\frac{(a-b)^3}{16p} \qquad \text{(Jan. 1941.)}$$

198. Från vertex O i en parabel dragas två mot varandra vinkelräta kordor, OA och OB. Dessa kordors förlängningar skära parabelns styrlinje i C och D. Visa, att förhållandet mellan ytorna av trianglarna AOB och COD är konstant. (V. T. 1941.)

199. Två mot varandra vinkelräta tangenter till en parabel skära varandra i P. A är styrlinjens skärningspunkt med parabelns axel, F är parabelns brännpunkt. Visa, att tangenterna äro inre och yttre bisektriser till vinkeln FPA. (V. T. 1941.)

---

200. I parabeln $y^2 = 2px$ är F brännpunkten och A den punkt på parabelns axel, vars abskissa är $= \frac{5}{2}\,p$. Bestäm den punkt på parabeln, i vilken vinkeln FPA är den största möjliga. (V. T. 1918.)

201. P och Q äro punkter på parabeln $y^2 = 4ax$ så belägna, att kordan PQ samtidigt är normal till parabeln i P. På PQ är en rätvinklig triangel PQR uppritad med kateten PR vinkelrät mot parabelns axel. Beräkna denna katet, då den har sitt minsta värde. (H. T. 1919.)

202. Beräkna det största möjliga värdet på den spetsiga vinkel, som en från en parabels topp dragen korda bildar med parabeltangenten i kordans andra ändpunkt. (H. T. 1925.)

203. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna punkterna A $(-1; -4)$ och B $(-4; +2)$ samt parabeln $y^2 = 16x$. Var på parabeln skall en punkt C väljas, för att triangeln ABC skall få så liten yta som möjligt, och hur stor blir då denna? (H. T. 1932.)

204. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna parabeln $3y = x^2$ samt punkten P (0; 12). En likbent triangel har sin topp i P; dess bas är en med x-axeln parallell korda i parabeln. Om triangeln roterar kring y-axeln, uppkommer en kon. Angiv maximi- och minimivärdena av konens mantelyta, när kordans skärningspunkt med y-axeln rör sig från origo till P. (V. T. 1934.)

205. Tangenten och normalen i punkten P på parabeln $y^2 = 4ax$ råka parabelns styrlinje i punkterna T och N resp. Bestäm punkten P så, att avståndet TN får sitt minsta värde. (V. T. 1936.)

206. En parabels ekvation är $y^2 = 4\ ax$. En korda BC i parabeln skär dess axel vinkelrätt på avståndet $5a$ från vertex A. Normalen i en punkt P på parabeln skär BC i R. Sök maximivärdet på avståndet BR, när P rör sig från A till B. (Jan. 1938.)

207. Tangenten till parabeln $y^2 = 4\ ax$ i en punkt P på kurvan skär parabelns styrlinje i punkten Q. Bestäm koordinaterna för P, då sträckan PQ är ett minimum. (Aug. 1938.)

---

g. Geometriska orter.

208. I en triangel äro sidorna AB, BC, CA respektive 3, 4, 5 cm. Konstruera orten för en punkt D, så belägen, att, om den sammanbindes med triangelns hörn, triangeln BCD blir dubbelt så stor som triangeln ACD. (V. T. 1908.)

209. På x-axeln i ett givet koordinatsystem är en sträcka AB med längden a belägen. Sammanbindningslinjerna mellan punkten $(a; a)$ och A respektive B skära y-axeln i A_1 respektive B_1. Linjerna AB_1 och BA_1 skära varandra i P. Sök orten för P, då AB rör sig utefter x-axeln. (V. T. 1941.)

---

210. O är en fast punkt, L en fast rät linje, P en punkt i planet. Linjen OP, utdragen, skär L i Q. Produkten $OP \cdot OQ$ är konstant $= k^2$. Vilken är orten för P? (V. T. 1910.)

211. AB och CD äro två mot varandra vinkelräta diametrar i en cirkel, P en punkt på dess periferi. PA skär CD i E. En genom E parallellt med AB dragen linje skär PC i F. Visa, att orten för F är en rät linje genom D. (H. T. 1911.)

212. Två cirklar äro givna. Sök orten för medelpunkten till en cirkel, vilkens med de givna cirklarna gemensamma kordor äro diametrar i dessa. (H. T. 1919.)

213. En cirkel, vars radie är $= R$, har sin medelpunkt i origo. En annan cirkel, vars radie är $= r$, tangerar x-axeln i origo. En till båda cirklarna gemensam tangent träffar den sistnämnda cirkeln i P. Sök orten för P, då r varierar. (V. T. 1924.)

214. En rätvinklig triangel är given. Sök orten för en punkt P så beskaffad, att fotpunkterna till de tre normalerna från P mot triangelns sidor ligga i rät linje. (V. T. 1931.)

215. En cirkel med medelpunkten M och radien r samt en punkt O på avståndet $MO = 2r$ från M äro givna. Man uppritar liksidiga trianglar OAB, som ha ett hörn i O och ett hörn A på den givna cirkeln. Sök orten för det tredje hörnet B. (H. T. 1931.)

216. En cirkel med den givna radien r går genom origo. Sök orten för mittpunkterna till de ovanför och under x-axeln liggande cirkelbågarna. (V. T. 1938.)

217. Två fasta punkter A och B ha avståndet a. Genom A och B dragas två rörliga, inbördes parallella linjer L och L_1. Sök orten för medelpunkten till de cirklar, som gå genom A och tangera L och L_1. (V. T. 1939.)

218. Ekvationerna för två cirklar äro $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$ och $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$. En punkt P är så belägen, att summan av kvadraterna på de fyra tangenterna från P till cirklarna är 66 ytenheter. Sök orten för P. Angiv dess ekvation, konstruera den och undersök, om hela den erhållna kurvan svarar mot problemet. (Jan. 1941.)

---

219. Från den ena ändpunkten A av en ellips' storaxel drages en rät linje till en punkt P, vilken som helst, på periferien. Vilken är orten för den punkt, vari en genom centrum parallellt med AP dragen linje skär tangenten i P? (V. T. 1896.)

220. En determinerad rät linje glider med sina ändpunkter på de två vinkelräta koordinataxlarna. Vilken kurva beskriver då en viss uppgiven punkt av densamma? (H. T. 1898.)

221. I en ellips drages en korda parallell med ellipsens mindre axel. Genom ellipsens medelpunkt drages en linje genom kordans ena ändpunkt samt en annan linje genom kordans mitt och ena ändpunkten av ellipsens mindre axel. Sök orten för skärningspunkten mellan dessa linjer, då kordan rör sig parallellt med ellipsens mindre axel. (H. T. 1920.)

222. Vilken kurva beskrives av en punkt, som rör sig i ett rätvinkligt axelsystems plan på det sätt, att dess avstånd till y-axeln alltid är dubbelt så stort som dess avstånd till punkten $x = 1$, $y = 0$? (H. T. 1921.)

223. En ellips samt den cirkel, vars diameter är ellipsens storaxel, äro givna. En normal mot storaxeln skär ellipsen och cirkeln i punkterna A och B resp. Sök orten för skärningspunkten mellan normalerna i punkterna A och B. (H. T. 1921.)

224. Bestäm orten för medelpunkterna till alla cirklar, som tangera de båda cirklarna $x^2 + y^2 = 36$ och $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. (H. T. 1924.)

225. I den likbenta triangeln ABC äro sidorna AC och BC lika långa. En rörlig, mot AB (eller dess förlängning) vinkelrät linje skär AC eller dess förlängning i punkten E och BC eller dess förlängning i punkten F. Sammanbindningslinjerna AF och BE råkas i punkten P. Sök orten för P. (V. T. 1933.)

226. En obegränsad rät linje är dragen genom en given cirkels medelpunkt. A är en punkt på linjen, B en punkt på cirkeln, sådan att AB är lika med cirkelns radie. M är mittpunkten på sträckan AB. Sök orten för M, när A glider längs linjen. (H. T. 1937.)

227. En ellips, vars axlar äro parallella med koordinataxlarna, är inskriven i den triangel, som begränsas av koordinataxlarna och linjen $3x + 2y = 6$. Sök och konstruera orten för ellipsens medelpunkt. (V. T. 1940.)

---

228. Vilken är orten för skärningspunkten mellan den normal, som från hyperbelns $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ena brännpunkt drages mot en godtycklig tangent till kurvan, och radien från centrum till samma tangents kontaktspunkt? (V. T. 1901.)

229. Vilken är orten för spetsen av en triangel, då motstående bas är fast ($= 2a$), och skillnaden mellan vinklarna vid basen konstant $= v$? (H. T. 1902.)

230. Genom punkten $(0; a)$ äro dragna två räta linjer, som bilda 45° vinkel med y-axeln. En rät linje rör sig parallellt med y-axeln och råkar de givna linjerna i R och S. På denna linje väljes en punkt P så, att avståndet från P till x-axeln är geometriskt medium till avstånden från R och S till samma axel. Sök geom. orten för P. $(a > 0.)$ (V. T. 1905. Ändrat.)

231. I triangeln ABC är basen BC fast; dess mittpunkt är D. Linjen AD är alltjämt medelproportional mellan sidorna AB och AC. Vilken är orten för spetsen A? (V. T. 1907.)

232. I hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ äro en mot x-axeln vinkelrät kordas ändpunkter medelst kordor förenade med var sin av transversalaxelns ändpunkter. Sök orten för dessa senare kordors skärningspunkt. (V. T. 1914.)

233. I de punkter av hyperblerna

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ och } x^2 - y^2 = a^2,$$

vilka hava samma abskissa och samma tecken för ordinatan, dragas normaler till de båda hyperblerna. Sök orten för dessa normalers skärningspunkt. (V. T. 1917.)

234. Genom ändpunkterna av en genom medelpunkten gående rörlig korda i en hyperbel dragas linjer parallella med asymtoterna. Sök orten för dessa linjers skärningspunkt. (H. T. 1926.)

235. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro punkterna A $(0; +1)$ och B $(0; -5)$ givna. På AB uppritas parallelltrapets $ABCD$, i vilka de tre sidorna BC, CD och DA äro lika långa. Sök orten för hörnpunkten C. (H. T. 1935.)

---

236. Genom en parabels vertex O drages en korda OP. Därpå drages den mot denna korda svarande diametern. Genom diameterns skärningspunkt med styrlinjen drages en normal mot OP. Sök orten för normalens fotpunkt. (H. T. 1917.)

237. Från en punkt P på parabeln $y^2 = 2px$, vars topp ligger i O, nedfälles en normal mot parabelns axel. Från Q, där denna normal träffar axeln, drages en linje parallell med OP och en annan linje drages genom P parallell med axeln. Sök orten för skärningspunkten mellan dessa linjer, då P rör sig utefter parabeln. (V. T. 1924.)

238. P är en godtycklig punkt på en given parabel. Genom dennas brännpunkt F drages en rät linje, som är parallell med parabeltangenten i P. Denna linje råkar diametern genom P i en punkt Q. Sök ekvationen för orten för mittpunkten av sträckan FQ. (H. T. 1927.)

239. I en punkt på parabeln $y^2 = 2px$ dragas tangenten och normalen. De råka parabelns axel i T resp. N. På tangenten tages punkten Q så, att $NQ = NT$. Sök orten för mittpunkten på sträckan NQ. (H. T. 1929.)

240. En rät linje rör sig så, att den ständigt tangerar parabeln $y^2 = 2px$. Linjen skär parabeln $y^2 = -px + a$ i två punkter P och Q. Sök orten för mittpunkten av sträckan PQ. (V. T. 1930.)

241. I ett rätvinkligt koordinatsystem XOY har man tagit punkten P med koordinaterna $x = a$, $y = a$. Genom P lägges en rät linje l, som råkar x-axeln i A, y-axeln i B. Tangenterna i O och A till den kring triangeln OAB omskrivna cirkeln råkas i Q. Sök ekvationen för orten för Q, då l vrider sig kring P. (H. T. 1930.)

242. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna punkterna A $(a; 0)$ och B $(-a; 0)$ samt den linje, vars ekvation är $y = h$. En triangel ABC har två hörn i de givna punkterna; det tredje rör sig på linjen $y = h$. Sök orten för höjdernas skärningspunkt i triangeln ABC. När inträffar det, att den givna linjen $y = h$ blir styrlinje för orten, och var ligger då ortens brännpunkt? (H. T. 1933.)

243. Genom en rörlig punkt P på parabeln $y^2 = 4ax$ dragas de båda kordor, PQ och PR, som bilda 45° vinkel med parabelns axel. Sök orten för medelpunkten till den kring triangeln PQR omskrivna cirkeln. (Jan. 1936.)

244. På en rörlig korda OP i en parabel med toppen O tages en punkt Q, som ligger på samma avstånd från P och från skärningspunkten mellan parabelns axel och tangenten i punkten P. Sök orten för Q. (V. T. 1937.)

245. En romb, vars hörn äro i ordning A, B, C, D, har A i punkten $(5; 3)$, B på y-axeln och C på x-axeln. Bestäm orten för hörnet D. (Aug. 1937.)

246. En cirkel med medelpunkten M och en rät linje L äro givna. AB är den mot L vinkelräta diametern och C en rörlig punkt på cirkeln. L skäres av AC (eller dess förlängning) i punkten D. Linjen DP drages parallellt med AB och råkar MC (eller dess förlängning) i punkten P. Sök orten för P. (H. T. 1938.)

247. En fast linje L och en fast punkt A utanför denna äro givna. Normalen från A mot linjen L skär denna i B. P är en godtycklig punkt på linjen L, och Q är mittpunkten av PB. Sök orten för skärningspunkten mellan mittpunktsnormalerna till AP och AQ samt upprita denna. (Jan. 1939.)

248. P är en rörlig punkt på parabeln $y^2 = 4ax$, och N är den punkt, där normalen genom P skär parabelaxeln. Q är skärningspunkten mellan parabelns axel och styrlinje. Sök orten för skärningspunkten mellan medianerna i triangeln PNQ. (Aug. 1939.)

249. Två parabler, vilkas axlar sammanfalla med x-axeln, tangera den räta linjen $y = 2x$. Avståndet mellan deras vertices är en längdenhet. Sök och konstruera orten för dessa parablers skärningspunkter. (Jan. 1940.)

250. Storaxeln i en ellips är parallell med x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Ellipsen tangerar båda koordinataxlarna, och dess ena brännpunkt ligger på linjen $x = 1$. Sök och konstruera orten för den ändpunkt av ellipsens storaxel, som icke ligger på y-axeln. (Aug. 1940.)

SVAR OCH ANVISNINGAR.

I. Algebra, trigonometri m. m.

3. Satsen kan även visas gälla för en godtycklig triangel.

II. Funktionslära.

4. Uttrycket har ett max., då $x = 1 + \sqrt{6}$.

5. Värdet av andra derivatan $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. — Första derivatan $= 2$, då $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $a = 9$; $b = -3$.

7. Ja, icke värden *mellan* $+\frac{1}{3}$ och $+\frac{9}{11}$. — Framställ även funktionen grafiskt. Kurvans min.-punkt är $(+\frac{4}{3}; +\frac{9}{11})$, dess max.-punkt $(+2; +\frac{1}{3})$. Asymtoter äro: $y = 0$ och $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{8}$.

8. Ja, icke värden *mellan* -4 och $+6\frac{2}{3}$. — Framställ även funktionen grafiskt (en hyperbel) med angivande av max.- och min.-punkter samt asymtoter.

---

9. Max. $= 1{,}760$, då $x = 36{,}^\circ 38 + n \cdot 360^\circ$ och
max. $= 0{,}369$, då $x = 237{,}^\circ 47 + n \cdot 360^\circ$.
Min. $= -1{,}760$, då $x = 143{,}^\circ 62 + n \cdot 360^\circ$ och
min. $= -0{,}369$, då $x = 302{,}^\circ 53 + n \cdot 360^\circ$.
Skärn. med x-axeln, då $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, $x = 210^\circ + n \cdot 360^\circ$ och $x = 330^\circ + n \cdot 360^\circ$.

10. Max. $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$, då $x = 60° + n \cdot 360°$,

min. $= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, då $x = 300° + n \cdot 360°$.

11. Derivera båda leden m. avs. på x och beräkna $\cos^2 y$ ur den givna ekvationen. Derivatan blir

$$-\frac{a}{\sin^2 x\ (1 + a^2 \cdot \cot^2 x)} = -\frac{a}{\sin^2 x + a^2 \cos^2 x}.$$

12. Max. $= \frac{9}{8}$, då $x = \begin{cases} 28°{,}96 + 2n \cdot 360° \\ 331°{,}04 + 2n \cdot 360°. \end{cases}$

Min. $= 0$, då $x = 180° + 2n \cdot 360°$.

Min. $= -2$, då $x = 180° + (2n + 1) \cdot 360°$.

13. Kurvan har två serier max.-punkter $[n \cdot 2\pi; +1]$ och $[(2n + 1) \cdot \pi; +3]$ samt två serier min.-punkter $\left[\left(\pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right);\ +\frac{3}{4}\right]$. (Linjerna $x = n \cdot \pi$ äro symmetriaxlar till kurvan.)

14. Max. $= -2\sqrt{3}$, då $x = 150° + n \cdot 180°$.

Min. $= +2\sqrt{3}$, då $x = 30° + n \cdot 180°$.

15. $a = 2$; $b = 4$; $c = 1$.

16. Differensens max.-värde $= 0{,}54$. Vinkeln är då $17°{,}27$ $\left(\cos v = \frac{3}{\pi}\right)$. Uttryckes differensen som funktion av vinkeln v, måste v angiva dennas bågmått (radian-tal), dess gradtal således $= v \cdot \frac{180}{\pi}$.

17. $y_{\text{max.}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, då $x = \frac{\pi}{3}$; $y_{\text{min.}} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$, då $x = \frac{2\pi}{3}$.

18. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4(2 - x^2)}$.

19. Max.- och min.-värdena äro $+\frac{25\sqrt{5}}{27}$ $(2{,}07)$ och $-\frac{25\sqrt{5}}{27}$ resp., då motsvarande x-värden äro $+0{,}841 + n \cdot 2\pi$ $(48°{,}19 + n \cdot 360°)$ och $-0{,}841 + n \cdot 2\pi$ resp. $(\cos x = \frac{2}{3})$. Kurvan har dessutom en inflexionspunkt på x-axeln, då $x = \pi$; x-axeln är inflexionstangent.

20. Punkterna äro $(1{,}401 + n \cdot 2\pi;\ 0{,}938)$ och $(3{,}835 + n \cdot 2\pi;\ -0{,}938)$. Man finner den första tangentens vinkelk. $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

och de andras $= -\frac{\sqrt{3}}{5}$, varav $y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{5}$,

samt $\frac{\pi}{2} + x = 110°{,}27 + n \cdot 360° = (1{,}9246 + n \cdot 2\pi)$ rad.

eller $\frac{\pi}{2} + x = 249°{,}73 + n \cdot 360° = (4{,}3586 + n \cdot 2\pi)$ rad.

21. Funktionen har
en serie minima $= \frac{3}{4}$, då $x = 45° + n \cdot 180°$,
en serie minima $= \frac{1}{4}$, då $x = 135° + n \cdot 180°$,
en serie maxima $= \frac{33}{32}$, då $x = 7°{,}24 + n \cdot 180°$ och
en serie maxima $= \frac{33}{32}$, då $x = 82°{,}76 + n \cdot 180°$.
En lösn. utan deriv. finnes i »Elementa», juni 1939, sid. 137.

22. Kurvan skär x-ax., då $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, har asymtoterna $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ samt en serie max.-punkter $\left(\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi;\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ och en serie min.-punkter $\left(\frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi;\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — Ur $y' = 0$ fås lätt $\operatorname{tg} x = 1$. Huruvida max. *eller* min. föreligger avgöres enklast genom undersökn. av teckenvariationen för y'.

23. $a = 1$. Symbolen $\frac{d^2y}{dx^2}$ har samma betydelse som y''.

24. Max.-värdet av $AB = 0{,}2105$ längdenheter.

25. Funktionen har
en serie maxima $= \frac{1}{2}$, då $x = 210° + n \cdot 360°$,
en serie maxima $= \frac{1}{2}$, då $x = 330° + n \cdot 360°$,
en serie minima $= -4$, då $x = 90° + n \cdot 360°$ och
en serie minima $= 0$, då $x = 270° + n \cdot 360°$.

26. Uttrycket (y) har sitt min., då triangeln är likbent. — Uttryckas b och c som funktioner av en av triangelns spetsiga vinklar x, blir

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}, \text{ varav}$$

$$y' = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x \cdot \cos x}.$$

27. Medelpunktsvinkeln $= 108°{,}6$. — Är vinkeln $= x$ radianer, blir sektorytan $= \frac{1}{2}x$ och dubbla triangelytan $= \sin x$. Sök skärn. mellan motsv. funktionskurvor.

28. Den sökta längden $= 2{,}3$ dm. — Är medelp.-vinkeln $= 2x$ radianer, blir bågen $= 2x$ och $AT = \operatorname{tg} x$.
29. Medelpunktsvinkeln $= 102°$. — Är vinkeln x radianer och radien $= 1$, fås halva omkretsen av triangeln $= 1 + \sin\frac{x}{2}$ och bågen $= x$. Vinkeln erhålles, efter en andra approx., ur skärningspunkten mellan motsv. kurvor.

---

30. Den största möjliga rektangelns yta är $2Rr$.
31. PB bör väljas $= a : \sqrt{2}$,
32. Vinkeln AMB skall vara 120°.
33. Vinkeln BOC skall vara 30°.
34. Då ytan har sitt max. är $A = 26°{,}31$, $B = 53°{,}62$.
35. Max.-värdet $= \frac{s^2\,(4 + \sqrt{17})}{2}$.
36. Vinkelns max.-värde $= 72°{,}02$. PB är då $= a\,(\sqrt{10} - 2)$, om kvadratens sida $= 2a$. — Enkel geom. lösn. erhålles genom uppritning av en cirkel på DE som korda, vilken tangerar BC i P. Drag ut DE till BC:s förlängning och beräkna P:s läge gen. sekant-satsen.
37. Vinkeln är antingen 106° eller 14°. — Den motstående sidan kan läggas i det större eller i det mindre segmentet.
38. Rektangelns max.-yta $= r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Rektangelhörnen på bågen delar denna i delar, vilkas förh. $= 1 : 2 : 1$.
39. Om den omskrivna cirkelns radie är R, blir den inskrivna cirkeln störst, då kordan $AB = R\,(\sqrt{5} - 1)$. Halva vinkeln AOB är då $38°{,}17$.
40. Ytan av rektangeln har sitt största värde, då hörnet på bågen delar denna mitt itu. Ytans max.-värde $= \frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{v}{2}$, där r är sektorns radie och v dess medelpunktsvinkel.
41. Cylinderhöjden är $\frac{2}{3}r\sqrt{6}$, motsvarande volym $\frac{4}{9}\pi r^3\sqrt{6}$.
42. Cylindern har den minsta buktiga ytan.
43. Konens höjd är $\frac{4}{3}a$.
44. Vinkeln $= 126°{,}87$. Volymen $= \frac{8\,\pi\,\sqrt{5}}{15} \cdot r^3$.

45. Ytans max.-värde $= \frac{H^2 l^2}{4\,(Hl - 2S)}$. Möjlighetsvillkor: $Hl > 4S$.
46. Vinkeln $= 38°{,}94$; max.-ytan $= \frac{128\,\pi\,r^2}{27}$.
47. Största volymen $= 0{,}5$ m³; kanterna äro då 2 m, 0,5 m och 0,5 m. — Studera även funktionskurvan och angiv dess slutpunkter för det givna exemplet.
48. Triangeln skall vara liksidig. — De tre planen bortskära tre klotsegment, av vilka två äro lika. Inför de senares avstånd (x) från medelpunkten som variabel. Det tredje segmentets höjd finnes då $= \frac{2x^2}{r}$ (r är klotradien). De bortskurna segmentens volym (V) beräknas. Man kan skriva $\frac{dV}{dx} = \frac{2\pi}{r^3}\,(x^2 - r^2)\,(r^3 - 8x^3)$. V har min. (och kroppen i exemplet max.) då $x = \frac{r}{2}$. — En intressant lösn. finnes i »Elementa», juni 1938, sid. 133.
49. Förhållandet $= \frac{16\sqrt{10}}{125} = 0{,}405$. — I ett snitt genom konens spets A och klotets medelpunkt är $BC = 2r$ konens basdiameter (C ligger på klotytan) och $AB = AC = x$ generatriser. AD är konens höjd och AE är AC:s projektion på klotdiametern. Man finner, om klotradien $= R$, $AD = \frac{x^2}{2R}$ och ur likf. trianglar ADC och CEB $r^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4R}$. Är mantelytan M, fås $M^2 = \pi^2 r^2 x^2$. M^2 har max. då $x = \frac{8}{5}R$.
50. Volymens max.-värde $= \frac{16}{27}\,\pi\,a^3\,\sqrt{3} = 3{,}224\,a^3$, då konens höjd $= 2a$.
51. Uttryck v och y som funktioner av h samt beräkna $\frac{dv}{dh}$ och $\frac{dy}{dh}$.
52. Max.-volymen $= \frac{9}{16}\pi\,r^3$, där r är den givna sfärens radie. Max. föreligger, då sektorns radie $R = \frac{3}{2}r$.

53. Summan $= \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1 + z}{1 + z^2}$ $(z = \operatorname{tg} x)$. Max. $= \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$, då $z = \operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$; $x = 22^\circ{,}5$.

54. Min.-värdet $= 27$.

55. Summans max.-värde $= \frac{1}{3}\sqrt{3}$, då $x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$, dess min.-värde $= -\sqrt{3}$, då $x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$.

III. Analytisk geometri.

56. Antag, att linjernas ekvationer äro $y = kx + l$ och $y = k_1 x + l_1$, så fås
$(y - kx - l)(y - k_1 x - l_1) = x^2 + y^2 + 4xy + 2bx + 2cy$.
Genom jämförelse mellan koefficienterna i denna ekvations båda led bestämmas k och k_1 oberoende av b och c. Man kan också lösa den ursprungliga ekvationen med avseende på en av koordinaterna. Förutsättningen ger då mellan b och c sambandet $c = (2 \pm \sqrt{3})\, b$.

57. $a = -2$. Ekv. äro $3x - 2y - 2 = 0$; $3x + y + 7 = 0$.

58. Ekv. äro $x + 5y - 7 = 0$ och $x + y - 3 = 0$.

59. Avstånden äro $\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$ och $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ enh.

60. Punkten är antingen $(+4;\ +2)$ eller $(+64;\ +32)$.

61. Förhållandet $= 4 : 9$.

62. Vinkeln $= 56^\circ{,}25$.

63. Värdet på m är antingen 12 eller 20.

64. Radien $= \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ enheter.

65. Två motst. vinklar (v_1 och v_2) äro suppl.-vinklar ($\operatorname{tg} v_1 = -\operatorname{tg} v_2$). Tre av bisektriserna råka varandra i *en* punkt.

66. Linjens ekv. är antingen $x - 7y + 4 = 0$ eller $x + 3y - 16 = 0$.

67. Punkten är $(-\frac{5}{8};\ +\frac{5}{8})$; min.-värdet $= 6\frac{3}{4}$.

---

68. Uttryck x som funktion av y. Kurvan (en hyperbel) har asymtoterna $y = +1$ och $x + y + 1 = 0$ samt $x_{\text{max.}} = -4$, då $y = 2$ och $x_{\text{min.}} = 0$, då $y = 0$.

69. Kurvan är en hyperbel med asymtoterna $x = 4$ och $y = x + 1$. Maximipunkt är $(+2;\ +1)$ och minimipunkt $(+6;\ +9)$.

70. Kurvan består av tre oändliga grenar, skilda av asymtoterna $x = -1$ och $x = +1$. Dessutom är x-axeln asymtot till de båda yttersta grenarna. Den mellersta grenen har minimipunkten $\left(2 - \sqrt{3};\ \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)$ och grenen längst till höger maximipunkten $\left(2 + \sqrt{3};\ \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$.

71. Kurvan har x-axeln till asymtot och skär densamma i origo under 45° vinkel (inflexionstangentens riktningsvinkel). Min.-punkt är $(-2;\ -1)$, max.-punkt $(+2;\ +1)$. Sök även andra inflexionspunkter.

72. Asymtoter äro $x = +1$ och $y = +1$. Min.-punkt $(0;\ 0)$. Kurvan skär asymtoten $y = +1$ i punkten $(+\frac{1}{2};\ +1)$.

73. Asymtoter äro $x = 0$ och $y = +1$. Max.-punkt är $(+1;\ +6)$. Kurvan skär asymtoten $y = +1$ i $(+\frac{1}{2};\ +1)$.

74. En enda gren gen. origo. Delarna i första och tredje axelvinkeln äro kongruenta. Asymtot är $y = x$. Max.-och min.-punkter äro i första axelvinkeln $(+\sqrt{3};\ +6\sqrt{3})$ och $\left(+3\sqrt{2};\ +\dfrac{27\sqrt{2}}{4}\right)$ resp. I tredje axelvinkeln äro max.- och min.-punkterna $\left(-3\sqrt{2};\ -\dfrac{27\sqrt{2}}{4}\right)$ och $(-\sqrt{3};\ -6\sqrt{3})$ resp.

75. Asymtoterna äro $x = 1$ och $y = x$. Max.-punkt är $(0;\ 0)$; min.-punkt är $(\sqrt[3]{4};\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{4})$.

76. Kurvan skär x-axeln i $(-3;\ 0)$, $(0;\ 0)$ och $(+3;\ 0)$. De två yttersta av dessa äro slutpunkter. Tangenterna i dessa punkter äro: $x = -3$; $y = x\sqrt{3}$ och $x = +3$ resp. Max. i $(+\sqrt{6};\ +\sqrt[4]{108})$, min. i $(-\sqrt{6};\ -\sqrt[4]{108})$.

77. Kurvan skär x-axeln i $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$ och y-axeln i $(0;\ +1)$; den har max.-punkten $\left(+\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ +\sqrt{2}\right)$ samt slutpunkter i $(+1;\ +1)$ och $(-1;\ -1)$. Kurvan är en halv ellips och kan uppritas punkt för punkt, om man observerar, att högra ledet är »sammansatt» av räta linjen $y = x$ och halvcirkeln $y = \sqrt{1 - x^2}$.

78. Kurvan (en hyperbel) har två grenar, den ena i andra axelvinkeln med min.-punkten $(-3;\ +4)$ och tangerande y-axeln i $(0;\ +10)$, den andra med max.-punkten $(+5;\ 0)$ och tangerande linjen $x = 2$ i $(+2;\ -6)$. — Deriveras »implicit» och sättes y' och $x' = 0$ fås lätt max. och min. för y och x resp. »Teckenbest. delen» av y'' och x'' blir $(10 - y - 8x)$ och $(x + 2y - 5)$ resp. — Existensområden samt max.- och min.-värden kan man även erhålla genom att lösa ekv. med avs. på såväl x som y och diskutera villkoren för reella rötter.

79. Koord. för P äro $(+\frac{1}{2};\ +\frac{3}{4})$. Max.-ytan $= \frac{1}{20}$ ytenh.

80. $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{2x^2}$. Asymtoter: $x = 0$ och $y = \dfrac{x}{2} + 3$. Två grenar. Min.-punkt $(+4;\ +6\frac{3}{4})$. Inflexionspunkt $(-2;\ 0)$. Den sneda asymtoten skär kurvan i punkten $(-\frac{2}{3};\ +2\frac{2}{3})$.

81. Funktionens derivata satt $= 0$ ger en ekv. av 3:e graden, vars ena rot enl. uppg. $= 1$. Härur och ur övriga villkor finner man $a = \frac{7}{3}$; $b = 9$. Två grenar. Den ena av dessa har ett max. i punkten $(+1;\ +9)$ och ett min. i punkten $(-\frac{3}{2};\ +4)$ samt skär y-axeln. Den andra har ett max. i punkten $(-3;\ +1)$ och skär x-axeln, som är asymtot, och till vilken kurvans båda grenar närma sig efter inflexioner. Kurvans båda grenar skiljas av asymtoten $x = -\sqrt[3]{9}$.

82. Ytan får max.-värdet $\frac{1}{4}$, då P befinner sig i punkten $(+1;\ +1)$. Då P avlägsnar sig obegränsat (på kurvan), närmar sig ytan gränsvärdet $\frac{1}{6}$ ytenh.

83. Vinklarna äro $49°{,}40$, $14°{,}04$ och $116°{,}56$.

84. Triangelytan $= 1\frac{1}{12}$ ytenheter. — Infl.-punkterna äro $(\pm 1;\ +\frac{7}{12})$.

85. Man erhåller $a = 2$; $b = 1{,}6$. — Övriga asymtoter äro $x = \pm 1$. Max.-punkt i $(-2;\ -6{,}4)$; min.-punkt i $(+2;\ +6{,}4)$. Tre grenar: en i 1:a, en i 3:de axelvinkeln, en — mellan de parallella asymtoterna — i 2:a och 4:e axelvinkeln.

86. Punkten P genomlöper hela x-axeln utom den del av denna, som faller mellan $(3 - 2\sqrt{2})$ och $(3 + 2\sqrt{2})$. — Uttryck punkten P:s abskissa som funktion av den rörliga linjens vinkelkoefficient och diskutera denna funktion. Grafisk framställn. därvid lämplig.

87. Koord. för A äro $\left(\pm \dfrac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{3}{2}\right)$.

88. Parallellogrammens yta $= 4\sqrt{3} = 6{,}928$ ytenh. — Man finner $a = 0$, $b = -4$. Kurvans ekv. således $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$, vars max.- och min.-punkter samt asymtoter lätt finnas.

89. $a = 2$. Den andra tang.-punkten är $(-7;\ 2\frac{7}{9})$.

90. Den sökta punkten är $(+1;\ +2\frac{1}{2})$ eller $(-1;\ -2\frac{1}{2})$.

91. Är funktionen (kurvan) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, max.-punkten $(x_1;\ y_1)$, min.-punkten $(x_2;\ y_2)$ och infl.-punkten $(x_0;\ y_0)$, finner man lätt $x_1 + x_2$ ur $y' = 0$ och x_0 ur $y'' = 0$. (Se även »Elementa», dec. 1939, sid. 272.)

92. $a = 2$; $b = 3$. Kurvan har en inflexionspunkt även då $x = -3$ och då $x = 0$. Konstruktion!

93. Kurvans ekv. är $y = -\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} + x$. Abskissorna för kurvans skärn.-punkter med x-axeln äro $-3{,}31$ och $+1{,}81$. Max.-punkt är $(+1;\ +\frac{7}{12})$, min.-punkt $(-2;\ -1\frac{2}{3})$.

94. Betecknas A och B med $(x_1;\ y_1)$ och $(x_2;\ y_2)$ erhålles ytan $T = \pm \frac{1}{2}\,(x_1y_2 - x_2y_1)$, varav efter subst. $(x_2 = x_1 + 1)$ $T = \pm \frac{1}{4}\,(x_1^2 + x_1 - 6) = \pm \frac{1}{4}\,(x_1 + 3)\,(x_1 - 2)$. För växande x-värden avtager ytan från ett oändl. stort värde till 0 (då $x_1 = -3$), växer ånyo och får ett max. $= \frac{25}{16}$ ytenh. (då $x_1 = -\frac{1}{2}$), avtar till 0 (då $x_1 = +2$) och växer ånyo mot oändl. — Grafiskt följer T de delar av de båda parablerna $T = 0$, som ligga ovanför x-axeln.

95. Vinkeln är $89°{,}735$ (tg $v = 216$). — Kurvans asymtoter äro y-axeln och linjen $y = \frac{3}{2}x$.

---

96. Två sådana cirklar finnas. Deras ekvationer äro resp. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ och $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

97. Ekv. är $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

98. Skärningspunkten är $(-13{,}6;\ +6{,}8)$.

99. Cirklarnas ekvationer äro $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ och $(x + 13)^2 + (y - 13)^2 = 169$.

100. Cirkelns ekv. är $(x - \frac{7}{4})^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = \frac{725}{16}$.

---

102. Excentriciteten $= \frac{1}{6}\,(\sqrt{39} - \sqrt{3}) = 0{,}752$.

103. Förhållandet $= \frac{1}{6}\sqrt{42} = 1{,}080$.

104. Vid vanligt läge på koord.-axlarna blir ekv. $9x^2 + 16y^2 = 144$.

105. Excentriciteten $= \dfrac{\sqrt{2(r_1^2 + r_2^2 - 2m^2)}}{r_1 + r_2}$.

106. Sidans längd $= \dfrac{16\sqrt{3}}{3} = 9{,}238$ enh.

107. Tangentens längd $= b$ (oberoende av P:s läge).

108. Excentriciteten $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$. Förhållandet $= \frac{1}{2}$.

109. Excentriciteten $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$.

112. Excentriciteten $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071$.

113. Ytan $= 4\frac{2}{3}$ ytenheter.

114. Excentriciteten $= \sqrt{\sqrt{8} - 2} = 0{,}910$.

115. Vinklarna äro $23°{,}08$ och $156°{,}92$.

118. Excentriciteten $= \dfrac{4 - \sqrt{7}}{3} = 0{,}4514$. — Drag $PD \perp AB$. Man finner lätt B:s koordinater $(a;\ a + c)$ och därmed BD och PD. Vidare är $\wedge\ PP_1B = \wedge\ PBP_1$, varav $PB = PP_1 =$ parametern. Ur $\triangle\ PBD$ erhålles den ekv., som ger e.

121. Excentriciteten $= \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774$.

122. Är $(x_1;\ y_1)$ kordans andra ändpunkt och $(x_2;\ b)$ tangenternas skärn.-punkt erhåller man kordans vinkelk. $k_1 = -\dfrac{b}{c} = -\dfrac{b - y_1}{x_1}$, och ur tangentens ekv. $\dfrac{x_1x_2}{a^2} + \dfrac{y_1}{b} = 1$, varav $x_2 = \dfrac{b - y_1}{b} \cdot \dfrac{a^2}{x_1} = \dfrac{b - y_1}{x_1} \cdot \dfrac{a^2}{b} = \dfrac{a^2}{c}$.

123. Excentriciteten $= \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$.

124. Excentriciteten $= 0{,}25$.

125. Trianglarna ha sina max.-värden, då höjderna äro störst, d. v. s. då tangenterna i C_1 och C_2 äro parallella med kordan.

127. Vinkelns max.-värde $= 8°{,}21$, då $v = 49°{,}11$.

128. Ekv. äro: $2x \pm y\sqrt{2} \pm 2\sqrt{6} = 0$.

129. Excentriciteten bör vara $= \sqrt{4\sqrt{3} - 6} = 0{,}9634$.

130. Den största vinkeln $= 112°{,}62$.

131. Punkten P skall ligga mitt på AB.

132. Förhållandet mellan axlarna är $\sqrt{3}$.

133. Volymens min.-värde $= \dfrac{\pi \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot ab^2$.

134. Avståndet $= \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$.

135. Ellipsens ekv. är $\dfrac{9\left(x - \dfrac{h}{3}\right)^2}{h^2} + \dfrac{3y^2}{l^2} = 1$. — Ekv. har formen $\dfrac{(x - a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ och dess tangent således formen $y = k\,(x - a) + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$. Då k är given, kan a och därmed ytan uttryckas som funktion av b.

136. Ytans min.-värde = kvadraten på halva lillaxeln. — Tangenten går genom parameterns ändpunkt. (Se f. ö. »Elementa», dec. 1939, sid. 272.) — Vid lösn. med användn. av vinkelkoeff.-form. för tangenten finner man min., då vinkelkoeff. $= -\dfrac{c}{a}$, om man valt den positiva brännpunkten och lagt triangeln ovanför x-axeln.

137. Excentriciteten $= \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447$. — Man finner halva ytan av fyrhörningen $= \dfrac{a^3}{c}$ och halvparametern $p = \dfrac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$, varav $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$ samt halva ytan $= \dfrac{p^2}{e\,(1 - e^2)^2}$. Ytan har max., då nämnaren har min.

138. Excentriciteten $= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$. — Man finner förhåll. $z = \dfrac{2bc}{a^2}$ och $z^2 = 4\ (e^2 - e^4)$. $z_{\text{max.}} = 1$.

---

140. Ekv. är $4x^2 - y^2 = 4$; punkterna $(\pm\frac{3}{5}\sqrt{5};\ \pm\frac{4}{5}\sqrt{5})$.

142. Ytan är $\dfrac{ab}{2}$.

143. Cirkelns radie $= a\sqrt[4]{2}$.

144. Ekv. är $5x + 3y = 0$.

145. Excentriciteten $= \sqrt{3} = 1{,}732$.

146. Vinkelkoeff. äro ± 2 och $\pm \frac{1}{3}$.

147. Excentriciteten $= 1 + \sqrt{3} = 2{,}732$.

149. Satsen gäller för *alla* hyperbelkordor.

151. Hyperbelns ekvation är $7x^2 - 18y^2 = 126$; tangeringspunkten är $(-12; +7)$.

152. Vinklarna äro $41°{,}41$, $41°{,}41$ och $97°{,}18$. — PF befinnes $= 2a$; visa, att triangeln är likbent.

153. Hyperbelns ekvation är $\frac{(x+2)^2}{18} - \frac{(y-3)^2}{4\frac{1}{2}} = 1$.

154. Vinkeln $= 74°{,}21$. $\left(\text{Man finner } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

155. Excentriciteterna äro $\frac{\sqrt{10}}{5} = 0{,}6325$ och $\frac{2\sqrt{10}}{5} = 1{,}2649$ resp.

156. Ur ellipsens ekv. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ och hyperbelns ekv. $x^2 - y^2 = d^2$ erhålles $a^2 = b^2 + 2d^2$. Upprita rätv. trianglar med kateterna || axlarna på tangentstyckena P_1P_2 och P_3P_4. Elimineras y ur ena ellipstangentens ekv. $y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}$ och hyperbelns ekv., finnes den ena kateten $= |x_1 - x_2| = \left|\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^2-1} \cdot \sqrt{b^2+d^2}\right|$ och den andra $|y_1 - y_2| = |k(x_1 - x_2)|$. På likn. sätt beräknas kateterna $|x_3 - x_4|$ och $|y_3 - y_4|$; här insättes $k_1 = -\frac{1}{k}$ varvid $|x_1 - x_2| = |y_3 - y_4|$ och $|y_1 - y_2| = |x_3 - x_4|$.

157. Excentriciteten är $\frac{\sqrt{30}}{3} = 1{,}826$.

158. Excentriciteten $= \sqrt{3} = 1{,}732$.

160. Hyperbelns ekv. är $9\,x^2 - 16\,y^2 = 128$.

161. Vinkeln $(2\,\alpha) = 120°$. — Brännpunktsradierna från tang.-punkten $(x_1;\, y_1)$ kunna sättas $= 3\,m$ och $7\,m$, varav halva transv.-axeln $a = 2\,m$ och $\frac{cx_1}{a} - a = 3\,m$. Vidare är $\cos\frac{v}{2} = \frac{a}{c} = \frac{c - x_1}{3\,m}$ o. s. v.

163. Den spetsiga vinkeln är $75°{,}52$. — Koord. för cirkelns skärn.punkter med hyperblerna uttryckas som funktioner av radien. Insättas de i hyperblernas ekvationer erhålles förhållandet mellan halvaxlarna.

164. Triangelns yta $= 2\frac{2}{3}$ ytenheter.

165. Vinkeln $= 90°$. — Uttryck tangenternas vinkelkoeff:r k_1 och k_2 som funktioner av skärningspunktens koordinater $(x_1;\, y_1)$, som man icke behöver beräkna, samt eliminera x_1 och y_1. Man erhåller $k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

166. Man erhåller lätt $\operatorname{tg}\alpha$ och $\operatorname{tg}\beta$ samt $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = = \frac{c\,(a^3 + b^3)}{ab\,(c^2 - ab)} = \frac{c\,(a + b)}{ab} \cdot \left(e_1 = \frac{c}{a},\ e_2 = \frac{c}{b}\right)$.

167. Excentriciteten $= \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118$. — Observera, att hyperbelkordan AB (A är vertex) och stycket CD mellan asymtoterna ha gemensam mittpunkt, varav $AC : AD = 1 : 3$. Förh. $AC : AD$ är även = förh. mellan ordinatorna för C och D, vilka lätt erhållas.

168. P skall vara parameterns ändpunkt.

---

170. Sökes abskissan för skärningspunkten mellan två av normalerna blir densamma $= -\frac{x_1x_2\,(x_1 + x_2)}{8a^2} = \frac{x_1\,x_2\,x_3}{8a^2}$, således oberoende av vilka två normaler, som valdes.

171. Cirkelns ekvation är $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$. (För det fall att *yttervinkeln* mellan tangenterna är 60°, är cirkelns ekvation $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}p^2$).

172. Excentriciteten $= \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$.

173. Vinkeln $= 35°{,}27$.

176. Medelpunkten är $\left(\frac{R^2 + p^2}{2p};\ 0\right)$.

177. Ytan $= p^2\,(12 + 7\sqrt{3}) = 24{,}12\ p^2$.

178. Excentriciteten $= 1 + \sqrt{2} = 2{,}414$.

179. Är parabelns ekv. $y^2 = 4ax$, är punkten $(4a;\, 0)$.

181. $a = 1$; $b = \frac{1}{5}$.

183. Parabelns ekv. är $\left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = \frac{48}{7}\left(x + \frac{195}{112}\right)$.

184. Beräkna koefficienterna (k_2 och k_3) för AC och AD, uttryckta i *ordinatorna* för A (y_1) och C (y_2) samt för A och D (y_3) resp. Då B ligger på diametern till CD, erhålles en enkel relation mellan dessa ordinator ($y_1 + y_2 = -y_1 - - y_3$), som omedelbart ger $k_2 = -k_3$.

185. Anv. vinkelkoeff.-formen för alla tre tangenterna och beräkna koord. för A och B samt därefter vinkelkoeff. för FA och FB. (En intressant geom. lösning finnes i »Elementa», december 1937, sid. 291.)

186. Drag $AE \perp BD$ och — från fokus F — $FP \perp CD$. P ligger då på tangenten i origo. Ytan är då $= AE \cdot FP$. Att produkten $AE \cdot FP$ är konstant erhålles ur likformiga trianglar.

187. Ytan är 32 ytenheter.

188. Sambandet kan uttryckas gen. ekv. $x_1x_2\,(x_1 + x_2) = -\frac{1}{8}$.

189. Avståndet $= p$.

190. Ekvationerna äro $y^2 = -\frac{2}{7}\left(x - \frac{11}{2}\right)$ och $y^2 = 14\left(x - \frac{27}{14}\right)$.

191. Ekvationerna äro $x - y + 5 = 0$ och $x + y + 5 = 0$.

192. Parametern $= 2\sqrt{3} = 3{,}464$.

193. Är skärningspunkten $(x_1;\ y_1)$, fås $rs = x_1^2 - a^2 = tu$. (x_1 och y_1 beräknas icke.)

194. Punkterna äro antingen $(p;\ 0)$ eller $(\frac{1}{3}\,p;\ 0)$.

195. Ändpunkterna äro $(+1;\ -2)$ och $(+9;\ +6)$.

196. Excentriciteten $= \frac{2}{3}$.

197. Är M $(x_1;\ y_1)$ AB:s mittp. och C $(x_2;\ y_2)$ erhåller man $y_1 = \dfrac{a^2 + b^2}{4p}$ och $y_2 = \dfrac{(a+b)^2}{8p}$, varav $MC = \dfrac{(a-b)^2}{8p}$. MC tages till gemensam bas för trianglarna MBC och MAC.

198. Förhållandet $= 16$. — Är parabelns ekv. $y^2 = 4ax$ och A $(x_1;\ y_1)$, B $(x_2;\ y_2)$ erhålles förh. $= \dfrac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \dfrac{x_1}{a} \cdot \dfrac{x_2}{a}$ (ur likf. trianglar).

199. Att de två tangenterna råkas på styrlinjen torde förut vara känt. Orten för skärn.-punkten erhålles eljest lätt genom elimin. av k ur tangenternas ekv.:r i vinkelkoeff.-form och ger $x = -a$. — Är B ena tang.-punkten och BD normalen mot styrlinjen fås $\triangle\, PBD \cong \triangle\, PBF$.

200. P bör ligga i parameterns ändpunkt.

201. Min.-värdet för PR är $8a$. P är parameterns ändp.

202. Vinkelns max.-värde är $19°{,}47$.

203. C:s koordinater äro $(+1;\ -4)$. Ytan $= 6$ ytenheter.

204. Ytans max.-värde $= 18\pi\sqrt{3} = 97{,}95$ ytenh. (då $y = 6$), dess min.-värde $= 8\pi\sqrt{15} = 97{,}34$ ytenh. (då $y = 8$).

205. P:s koordinater äro $\left(\frac{a}{3};\ \pm\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$.

206. Avståndets max.-värde $= 2a\ (1 + \sqrt{5})$.

207. P:s koordinater äro $\left(\frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right)$ eller $\left(\frac{a}{2};\ -a\sqrt{2}\right)$.

---

208. Orten utgöres av två genom C gående räta linjer. Om de positiva koordinataxlarna riktas längs BC och BA, bliva dessa linjers ekvationer $3x + 2y - 12 = 0$ och $x + + 2y - 4 = 0$.

209. Orten är linjen $x + y = 0$. — Sök ordinatorna för A_1 och B_1 uttryckta som funktioner av A:s abskissa x_1 och sammanställ ekv.:a för AB_1 och BA_1. Eliminationen av x_1 blir överraskande enkel.

210. Väljes O till origo, y-axeln $\parallel L$ och sättes avst. från O till $L = a$, blir orten cirklarna $x^2 \pm \frac{k^2}{a} \cdot x + y^2 = 0$.

211. Beviset kan grundas på att $\wedge\ APC = 45°$. Väljes AB till x-axel och CD till y-axel och betecknas vinkelkoeff. för AP med k samt för CF med k_1, finner man $k_1 = \dfrac{k-1}{k+1}$, varefter ekvationen för den sökta orten befinnes vara $y = x - r$.

212. Cirklarnas medelpunkter antagas vara $(0;\ 0)$ och $(a;\ 0)$, radierna r och R resp. Orten är räta linjen $x = \dfrac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}$.

213. Orten utgöres av två räta linjer $y = \pm R$. Visas lätt rent geometriskt.

214. Orten är den kring triangeln omskrivna cirkeln. Kan även med fördel visas rent geometriskt.

215. Lägges ett axelsystem med O till origo och OM till y-axel och kallas OB för ϱ, den vinkel, som OB gör med x-axeln för Θ (B:s polära koordinater), och B:s koordinater x_0 y_0, A:s koordinater x_1, y_1, fås: $x_0 = \varrho \cdot \cos\,\Theta$, $y_0 = \varrho \cdot \sin\,\Theta$, $x_1 = \varrho \cdot \cos\ (\Theta + 60°)$, $y_1 = \varrho \cdot \sin\ (\Theta + 60°)$, ur vilka ekvationer x_1 och y_1 kunna uttryckas i x_0 och y_0. Orten utgöres av cirklarna $(x \pm r\sqrt{3})^2 + (y - r)^2 = r^2$. — Inses även direkt av teorien för vridning (kring O).

216. Orten är de båda cirklarna $x^2 + (y \pm r)^2 = r^2$.

217. Är C mittpunkten av AB så är orten en cirkel med AC till diameter. — Inses lätt rent geometriskt.

218. Orten är den del av cirkeln $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, som faller utanför de båda givna cirklarna. — Ortcirkeln tangerar den senare av de två givna cirklarna och dess medelpunkt ligger på dessas centrilinje.

219. Orten är tangenten i storaxelns andra ändpunkt.

220. Om punkten delar den räta linjen i delarna m och n, så beskriver densamma en ellips, vars medelpunkt sammanfaller med origo, och vars halvaxlar ha längderna m och n respektive.

221. Med vanligt läge och ekv. för ellipsen blir orten de båda parablerna $x^2 = \pm \frac{2a^2}{b}\left(y \pm \frac{b}{2}\right)$.

222. Punkten beskriver ellipsen $3x^2 - 8x + 4y^2 + 4 = 0$.

223. Orten är en cirkel, koncentrisk med den givna. Dess radie är = summan av ellipsens halvaxlar.

224. Orten utgöres av ellipserna $15(x - 1)^2 + 16y^2 = 240$ och $3(x - 1)^2 + 4y^2 = 12$. Bevisas enkelt rent geometriskt.

225. Väljes AB till x-axel, dess mittnormal till y-axel, och sättes $AB = 2a$, höjden $= b$, blir orten ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

226. Lägges x-axeln längs den givna linjen och origo i cirkelns medelpunkt, blir orten ellipsen $4x^2 + 36y^2 = 9r^2$.

227. Orten är den del av kurvan $y = \frac{3\ (x - 1)}{x - 2}$, som är belägen mellan punkterna $(+1;\ 0)$ och $(0;\ +\frac{3}{2})$. Kurvan är en liksidig hyperbel med asymtoterna $x = 2$ och $y = 3$. — Skriv ellipstangentens ekv. i formen $y - y_0 = k\ (x - x_0) + \sqrt{k^2x_0^2 + y_0^2}$ (x_0, y_0 äro medelpunktens koord.) och jämför med den givna linjens ekv. — Övriga delar av kurvan utgöra ort för de tre vidskrivna ellipsernas medelpunkter.

228. Orten är de delar av linjerna $x = \pm \frac{a^2}{c}$, vilka begränsas av asymtoterna, tecknet beroende av den valda brännpunkten.

229. Orten är hyperbeln $x^2 - y^2 + 2xy \cdot \cot v = a^2$.

230. Orten är cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ o. hyperbeln $x^2 - y^2 = a^2$.

231. Orten är en liksid. hyperbel; brännpunkter i B o. C.

232. Orten är ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2l^2$.

233. Orten är hyperbeln $\frac{x^2}{(a - b)^2} - \frac{y^2}{(a + b)^2} = 1$.

234. Orten är den givna hyperbelns konjugathyperbel.

235. Orten är den undre grenen av hyperbeln $x^2 - 3\ (y + 1)^2 = -12$.

236. Den sökta orten är cirkeln $\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2$.

237. Orten är parabeln $y^2 = px$.

238. Om den givna parabelns ekvation är $y^2 = 4ax$, blir orten en parabel med ekvationen $y^2 = a\ (x - a)$.

239. Orten är parabeln $y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$.

240. Orten är parabeln $y^2 = -\frac{p}{4} \cdot x$.

241. Orten är parabeln $2x^2 - ax + ay = 0$. Undersök dess läge.

242. Orten är parabeln $x^2 = -h\left(y - \frac{a^2}{h}\right)$. Linjen blir styrlinje, då $a^2 = \frac{3h^2}{4}$. Brännp. är då $\left(0;\ \frac{h}{2}\right)$.

243. Orten är parabeln $y^2 = 4a(x - 4a)$.

244. Är parabelns ekv. $y^2 = 4ax$, blir orten ellipsen $2x^2 - 2ax + y^2 = 0$.

245. Orten är parabeln $(x - 5)^2 = 6\left(y + \frac{8}{3}\right)$.

246. Väljes AB till positiv x-axelriktning, M till origo, antages cirkelns radie $= r$ och ekv. för L vara $x = d$, blir ortens ekv. $y^2 = -2\ (r + d)\left(x - \frac{r + d}{2}\right)$, således en parabel med vertex i mittpunkten av BE, där E är L:s skärningspunkt med x-axeln, och brännpunkten i M. — Undersök parabelns läge, då d varierar från värden $> +r$ till värden $< -r$.

247. Väljes AB till x-axel och dess mittpunkt till origo blir (om $AB = 2a$) orten parabeln $2y^2 = 9ax$.

248. Orten är parabeln $y^2 = \frac{2a}{3}\left(x - \frac{a}{3}\right)$.

249. Orten är hyperbeln $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. — Om $y^2 = 2p_1\ (x - a_1)$ och $y^2 = 2p_2\ (x - a_2)$ äro de båda parablernas ekvationer $(a_2 = a_1 + 1)$ inses lätt, att tangeringspunkterna med linjen

$y = 2x$ äro $(2a_1;\ 4a_1)$ och $(2a_2;\ 4a_2)$ resp., varav $p_1 = 8a_1$, och $p_2 = 8a_2$. Parablernas ekvationer äro således $y^2 = 16a_1(x - a_1)$ (1) och $y^2 = 16a_2(x - a_2)$ (2). Elimineras y^2 ur dessa och insättes $a_2 = a_1 + 1$ fås skärn.-punktens abskissa $x = 2a_1 + 1$ och $a_1 = \frac{x-1}{2}$, som insatt i (1) ger ortens ekv.

250. Orten är parabeln $y^2 = x - 1$. — Uttryck a, b och c som funktioner av axeländpunktens koordinater. Ortens ekv. fås av samb. mellan a, b och c. Vänstra eller högra brännpunkten kan ligga på $x = 1$.